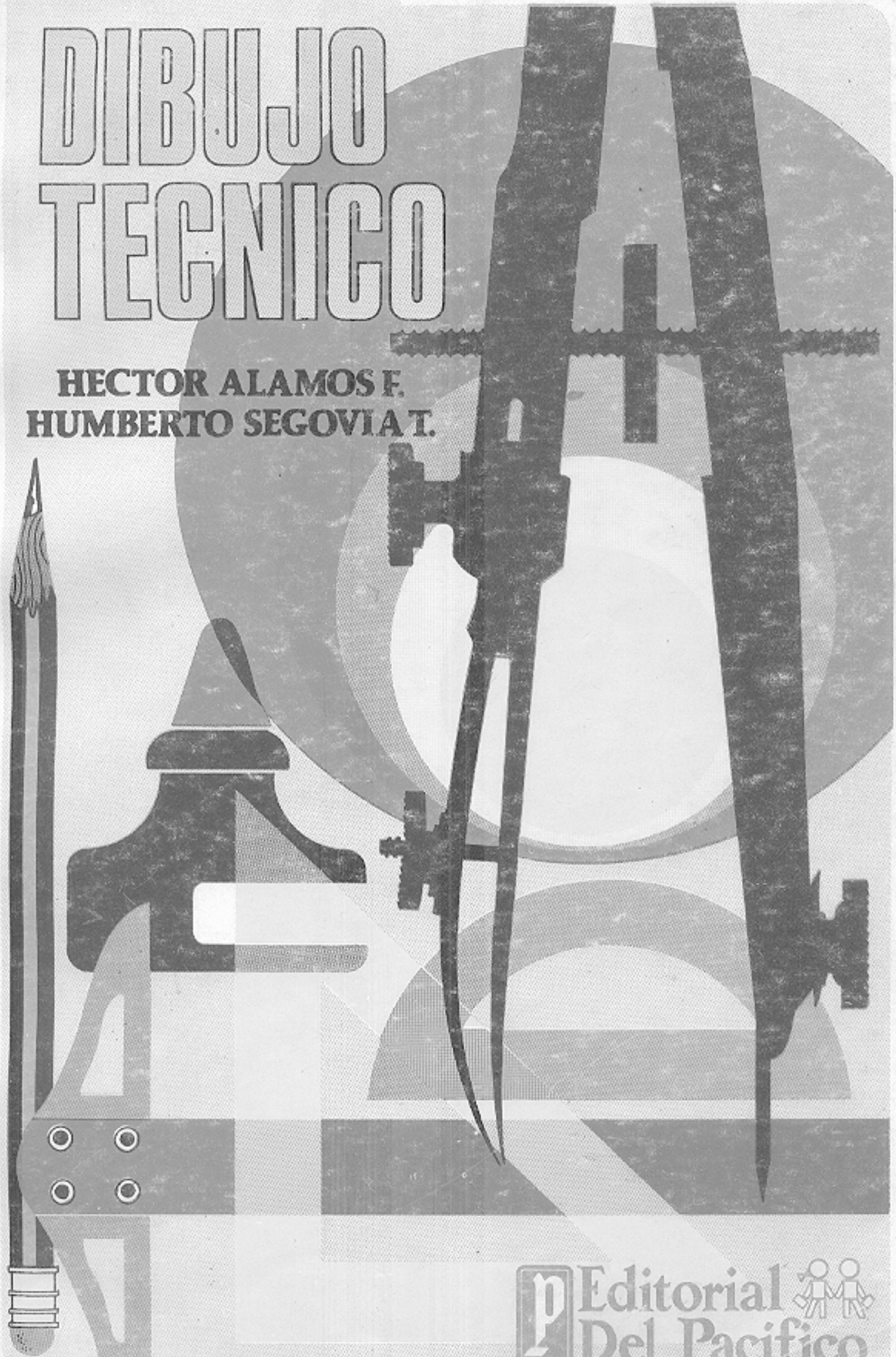
INTRODUCCION AL

DIBUJO TECNICO

HECTOR ALAMOS F.
HUMBERTO SEGOVIA T.



Editorial Del Pacifico

INTRODUCCION

Vamos a entrar al estudio de una de las ramas de la matemática que difiere fundamentalmente de la aritmética y del álgebra; ramo que, si bien hace uso frecuente de cálculos numéricos, ecuaciones y fórmulas, tiene por objeto principal el estudio de las formas y figuras, lo que nos permite adentrarnos en ese mundo maravilloso que se llama GEOMETRIA.

La Geometría se puede estudiar desde diferentes ángulos o puntos de vista, lo cual ha venido a desembocar en una diversificación de esta rama, tales como: Geometrías Plana, Descriptiva, Proyectiva, Analítica, etc., pero todas como es de suponer, bajo un solo patrón. Nos dedicaremos en esta oportunidad al estudio de la primera, vale decir, a la GEOMETRIA PLANA.

A.– BREVE RESEÑA HISTORICA.

Habría que decir que los antiguos babilonios, egipcios, fenicios, romanos y griegos, utilizaron la Geometría como un medio de un mayor confort en su vida diaria, utilizándola en la agrimensura, navegación, astronomía y otras actividades de tipo práctico, en resumen la Geometría nació como una "necesidad social".

Desde tiempos inmemoriables, fue preocupación del hombre observar el medio natural que lo rodeaba y de dicha observación llegó a establecer ciertas formas como puntas de lanzas y flechas en la Edad de Piedra, cacharros y vasijas en la Edad Neolítica, sin saber que lo que estaba copiando se tomaría como base de una ciencia que hoy en día conocemos por Geometría.

Hay que destacar la ingerencia de los babilonios, los cuales fuera de ser inventores de la rueda, descubrieron las propiedades de la circunferencia y establecieron la relación entre la longitud de ella y su diámetro (3 veces), como así también dividieron la circunferencia en 360 grados; obteniendo el grado sexagesimal, conociendo además el área del trapecio rectángulo y además podían dibujar un exágono inscrito a una circunferencia.

Fue en Egipto donde la Geometría alcanzó un desarrollo bastante notable, ya que esta ciencia era ocupada tanto en la agricultura como en la construcción.

La aplicación de los conocimientos geométricos a la medición de la tierra, fue la causa de que se diera a esta rama de las matemáticas el nombre de Geometría (geos = tierra y metrón = medida) por parte de los griegos.

Los faraones de Egipto hacían dividir las tierras en parcelas, las cuales debido a las frecuentes crecidas del río Nilo desaparecían partes de ellas. Los "arpedonaptas" (estiradores de cuerdas) o agrimensores tenían que rehacer los límites y calcular cuánto debía pagar el dueño del predio por concepto de impuesto, ya que éste era proporcional a la superficie cultivada.

De todos son conocidas las pirámides, construcciones que denotan el gran conocimiento de los elementos geométricos por parte de sus diseñadores como lo son las grandes pirámides de Gizé y Khufú, construidas hace más de 5.000 años, empleándose más de 1.000 hombres en un período de treinta años.

En los papiros que dejaron los egipcios, se encontraron estudios sobre el cuadrado, propiedades del triángulo rectángulo, cálculos sobre el triángulo isósceles, el trapecio isósceles y el círculo.

Desde Egipto fue llevada la Geometría a Grecia donde se profundizaron los estudios de estas materias como un noble placer del espíritu, teniendo como finalidad adentrarse en el mundo del saber.

La Geometría de los egipcios fue eminentemente empírica, ya que no se basaba en un sistema lógico deducido a partir de axiomas y postulados.

Los griegos fueron grandes pensadores que no se contentaron con saber reglas y resolver problemas; no se sintieron satisfechos hasta obtener explicaciones racionales de las cuestiones en general de la Geometría, empezando ésta como una ciencia deductiva tratando de sistematizar los hechos geométricos hasta entonces conocidos, estableciendo fundamentos y relaciones entre ellos.

En Grecia se destacan varios sabios que dedicaron gran parte de su vida al estudio y análisis de esta nueva ciencia filosófica; de entre ellos tenemos:

Tales de Mileto. Siglo VII A.C. Representa los inicios de la Geometría como ciencia racional. Fue uno de los siete sabios de Grecia y fundador de la escuela jónica. A él se debe la determinación de las medidas inaccesibles, la igualdad de los ángulos, el valor del ángulo inscrito, la suma de los ángulos interiores de un triángulo, división del círculo en dos partes, etc. y la demostración de otros axiomas que llevan su nombre.

Pitágoras de Samos. Siglo VI A.C. Se dice que fue discípulo de Tales, pero apartándose de la escuela jónica, fundó la escuela pitagórica. A él se debe la relación de los lados de un triángulo rectángulo, que analizaremos más adelante como así también la demostración de la suma de los ángulos internos de un triángulo y la construcción del pentágono estrellado que llegó a ser su símbolo dentro de su secta.

Euclides. Siglo IV A.C. Fue el primero en la Edad de Oro de la Geometría griega. Escribió una de las obras más famosas que sólo es aventajada por la Biblia, bautizándola con el nombre de "Elementos", que consta de 13 libros, cuyas enseñanzas han sobrevivido hasta nuestros tiempos.

Desde un punto de vista evolutivo numerosos autores distinguen las siguientes etapas o hitos históricos para el estudio de esta disciplina: la Clásica Sintética, la Cartesiana o Analítica, la Neoclásica y la Estructural.

La primera de ellas es considerada como la más brillante y adquiere su máxima relevancia en Grecia, destacándose como su mejor exponente Euclides, cuyas materias de enseñanza geométrica fue la base esencial de la época floreciente del Renacimiento y aún en nuestros días algunos métodos y normas fueron modelos fundamentales para la Geometría Neoclásica y recientemente los matemáticos estructuralistas han comprobado que algunos axiomas de la Geometría Clásica carece de rigor lógico, pero aun así sigue siendo pilar en el estudio de la Geometría moderna.

La Geometría métrica elaborada por los griegos estudiaba las propiedades de las figuras con la "inteligencia pura" vinculada al mundo exterior circundante como imágenes de formas ideales. Esta forma de concebir la geometría con el mundo tangible se constituyó como un hábito y habilidad mental de la época contribuyendo a establecer la Geometría elemental que se inicia aproximadamente en el año 1800.

El estudio de los postulados de Euclides fue una preocupación permanente en todas las épocas y los intentos por demostrarlos en base a otros postulados de las proposiciones primitivas logró establecer su independencia.

La Geometría Moderna deja al margen los cinco postulados fundamentales de Euclides y a base de imaginar la Geometría con sentido lógico y coherente la idea "Si una recta que corta a otras dos, forma ángulos internos del mismo lado cuya suma es menor que dos rectos, las dos últimas rectas se cortarán y hacia ese mismo lado" condujo a crear la Geometría no euclidiana, cuyo valor de verdad resulta equivalente a la tradicional o clásica.

La Geometría Clásica Euclidiana ha constituido el método didáctico perfecto del Dibujo Constructivo y de Diagramas como problemas de representación física del mundo de las formas, aunque los científicos contemporáneos afirman con mucha lógica que esta enseñanza ha perdido el grado de abstracción del primitivo significado o rigor lógico que le dieron sus fundadores y continuadores, destacándose entre ellos David Hilbert (1862-1943), quien a base de nuevas formulaciones axiomáticas de la Geometría euclidiana, presenta nuevas concepciones más completas y rigurosas que la Geometría clásica, de acuerdo a las nuevas exigencias que la lógica contemporánea ha configurado para estos estudios.

Platón. Siglo IV A.C. Contempló la Geometría con ojos de poeta más que de científico. Dividió ésta en elemental y superior, siendo la primera toda aquella que se podía resolver con regla y compás y la segunda, aquella que no podía ser demostrada con regla y compás, como: la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo. En la portada de la escuela donde impartía sus enseñanzas se leía el siguiente letrero: "Nadie entre que no sepa Geometría".

Arquímedes de Siracusa. 287–212 A.C. Fue discípulo de Euclides y el más científico de todos los sabios griegos. A él se debe la construcción de la espiral que veremos más adelante, calculó un valor más aproximado de Pi, el área de la elipse, el volumen del cono y de la esfera, encontró la cuadratura de la parábola, o sea, se dedicó al estudio de las cónicas y los cuerpos de revolución. Descubrió que todo cuerpo sumergido en un líquido pierde parte de su peso que es igual al peso del líquido desalojado, fue tal su entusiasmo por este descubrimiento que salió a las calles gritando: ¡Eureka! ¡Eureka! , dando con su descubrimiento paso a la determinación de los pesos específicos.

Después de los grandes geómetras griegos de la Edad de Oro, la Geometría es relagada a un segundo plano dándole más importancia a la Astronomía.

B.– DEFINICION DE GEOMETRIA

Es la rama de las matemáticas que tiene por objeto el estudio de las propiedades, dimensionamiento y forma de los elementos geométricos tales como: líneas, figuras y cuerpos.

Cuando este estudio tiene como universo de referencia un plano geométrico, vale decir, los elementos están contenidos en un plano, se dice GEOMETRIA PLANA y se consideran solamente dos dimensiones.

Hoy en día se siguen dos tipos de geometría: las euclidianas y las no euclidianas.

Los "Elementos" de Euclides siguen un método axiomático, ya que partiendo de proposiciones previamente establecidas, la Geometría se deduce toda en forma lógica. Posteriormente se ha visto que tiene varias fallas; sin embargo los defectos de que adolece son insignificantes comparados con el extraordinario mérito de haber construido una ciencia a partir de conocimientos solamente empíricos.

C.– GENERALIDADES

Antes de adentrarnos en el estudio de la Geometría Plana es conveniente conocer ciertas generalidades como lo son: la escritura griega, la cual es usada para señalar los ángulos y los signos convencionales usados en los problemas planteados.

a.– Alfabeto griego. (DIN–1453)

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ θ	ι	κ	λ	μ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Iota	Kappa	Lambda	Mu

ν	ξ	ο	π	ρ	σ ς	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
Nu	Xi	Omikron	Pi	Ro	Sigma	Tau	Upsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Iota	Kappa	Lambda	Mu

Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
Nu	Xi	Omikron	Pi	Ro	Sigma	Tau	Upsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

1) *Theta* y *Sigma* pueden escribirse de dos formas.
La altura (h) de las mayúsculas es un tercio más grande que las minúsculas.

b.– Signos geométricos.

$+$	Más	$\overleftrightarrow{AB}$	Recta AB
$-$	Menos	$\overrightarrow{AB}$	Rayo o semirrecta AB.
$\pm$	Más o menos.	$\overline{AB}$	Trazo o segmento AB.
$\mp$	Menos o Más.	$\Longrightarrow$	Implica.
$\neq$	No igual a. . . .	$\Longleftrightarrow$	Equivale
$\geqq$	Igual o mayor que . . .	$\perp$	Perpendicular.
$\leqq$	Igual o menor que . . .	$/\!/$	Paralela.
$\approx$	Aproximado.	$\measuredangle$	Angulo
$=$	Igual	$\llcorner$	Angulo recto.
$>$	Mayor que. . .		Vértice.
$<$	Menor que . . .	$\triangle$	Triángulo.
$\sim$	Semejante.	$\square$	Rectángulo.
$\cong$	Congruente.	$\lozenge$	Paralelógramo.
$\equiv$	Idéntico.	$\overset{\frown}{AB}$	Arco AB.
$\cup$	Unida.	$\odot$	Círculo o circunferencia.
$\cap$	Intersectada.	$\therefore$	Por lo tanto . . .
$\wedge$	Conjunción (y).	$\vee$	Disyunción (o)
$\{\ \}$	Conjunto.	$\in$	Es un elemento de
$\notin$	No es un elemento de	$\emptyset$	El conjunto vacío.

Los signos que aquí se señalan son los más conocidos y usados.

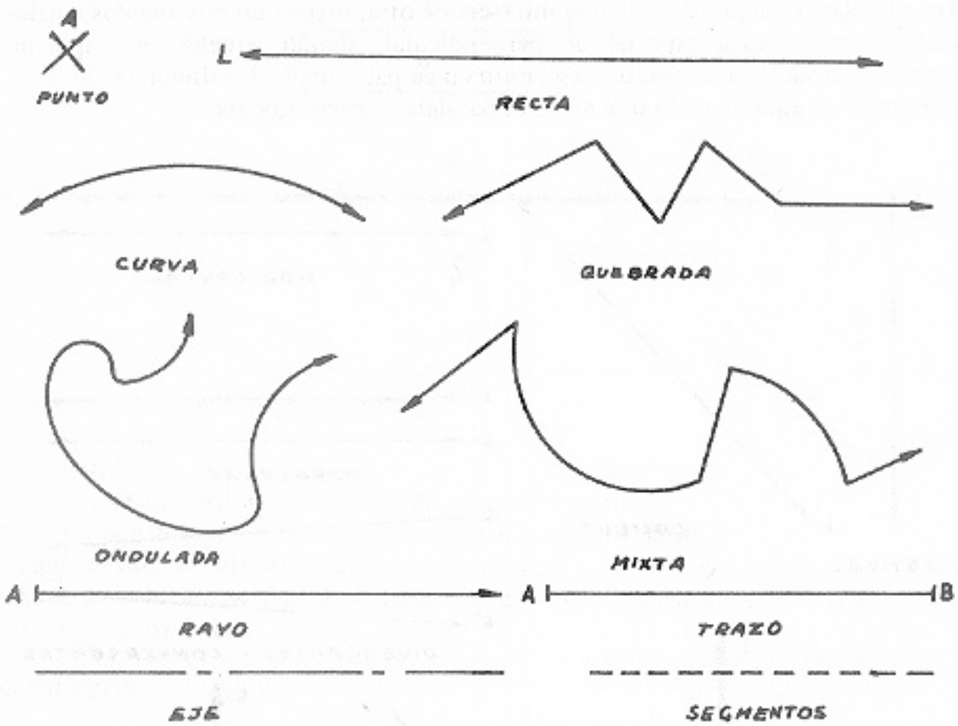
En Geometría se usan además abreviaciones de los elementos geométricos, los cuales no es necesario detallarlos aquí.

EL PUNTO Y LAS LINEAS

A.– EL PUNTO

El punto es un concepto básico e indefinible en Geometría y tiene la propiedad de carecer de toda dimensión.

Generalmente se representa mediante dos líneas que se intersectan y se designa por una letra mayúscula, por ejemplo: A, B, C, etc.



B.– LA LINEA

Es otro concepto básico y también indefinible en Geometría, entre sus propiedades se cuenta la de ser mensurable en una sola dimensión (longitud) y ser ilimitada en ella.

C.– TIPOS DE LINEAS

Las líneas pueden ser clasificadas en dos grupos, las rectas y las curvas.

Todo otro tipo será una derivación de las anteriormente mencionadas y tenemos: quebrada, ondulada y mixta.

Dentro del grupo de las líneas rectas tenemos: el rayo o semirrecta y el trazo o segmento.

a) Rayo o semirrecta: es la porción de recta que se extiende ilimitadamente desde un punto determinado llamado origen, hacia el infinito.

b) Trazo o segmento: es la porción de recta comprendida entre dos puntos determinados llamados extremos.

Tenemos unas líneas especiales cuya aplicación es usada solamente en dibujo y tenemos línea de eje y de segmentos.

a) Línea de eje: es un tipo especial de línea que sirve para representar simetrías y se compone de segmentos largos y cortos en forma alternada. Es una línea muy usada en dibujo al igual que la de segmentos.

b) Línea de segmentos: es aquella que sirve para representar partes ocultas de un dibujo y se compone de pequeños segmentos de igual longitud y separación.

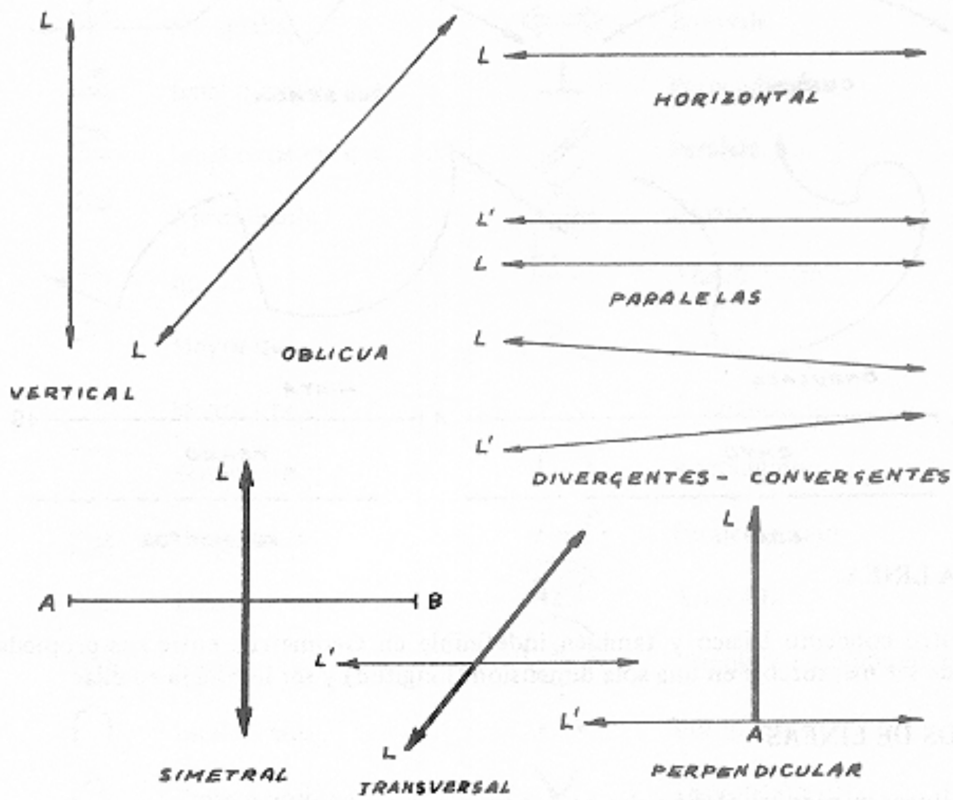
D.– POSICION RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO GEOMETRICO

Dos rectas pueden tener las siguientes posiciones una con respecto a la otra, las cuales pueden ser:

a) Paralelas: son aquellas que al prolongarse no tienen ningún punto en común y la distancia entre ellas es constante. Si dos rectas no son paralelas, pueden ser divergentes o convergentes, entendiéndose por divergentes las que tienden a separarse y convergentes las que tienden a intersectarse.

b) Perpendicular: es aquella línea que intersecta a otra, formando dos ángulos iguales (rectos). Simetral: es un caso especial de perpendicular, siendo aquella recta que intersecta perpendicularmente a un trazo o segmento en su parte media (lo dimidia).

c) Transversal: es aquella recta que no es ni paralela ni perpendicular.



E.– POSICION DE UNA RECTA EN EL PLANO GEOMETRICO

Una línea recta puede tener tres posiciones convencionalmente en un plano geométrico, pudiendo ser: horizontal, vertical y oblicua.

a) Horizontal: es aquella recta que sigue la dirección de las aguas tranquilas o en reposo, considerado esto en una pequeña extensión ya que al ser mayor, estas aguas siguen la curvatura de la tierra.

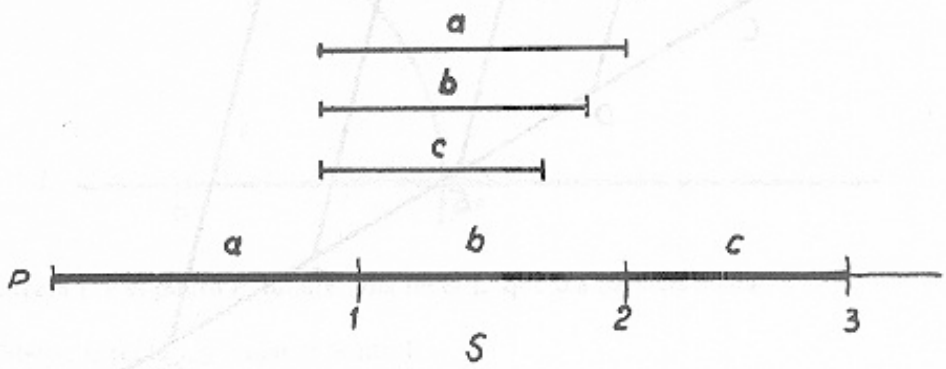
b) Vertical: es aquella que es perpendicular a la horizontal.

c) Oblicua: es aquella que no es horizontal ni vertical.

Para un dibujante, el sentido de horizontabilidad es la dirección que sigue la regla T en un tablero de dibujo, vale decir, de izquierda a derecha y el sentido de verticabilidad es colocando una escuadra recta (90 grados) sobre la regla T, vale decir, de abajo hacia arriba. El plano geométrico sería la hoja de papel o lámina.

OPERACIONES CON TRAZOS

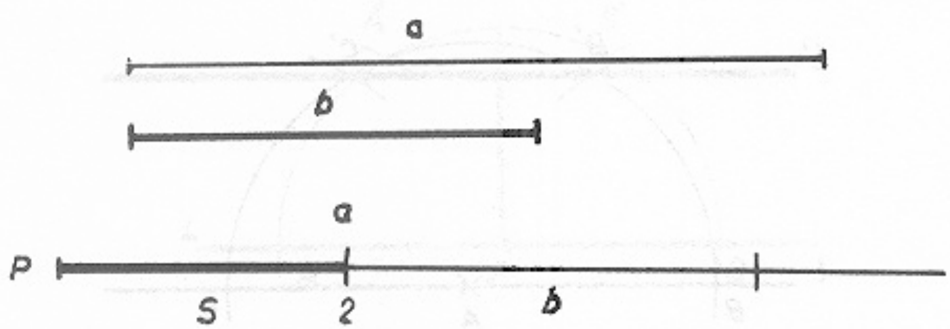
SUMA DE TRAZOS: a + b + c = S



Dados los trazos a, b y c, determinar su adición:

* Dibujar un rayo P.
* Se copia el trazo a, partiendo desde P; determina el punto 1.
* A partir del punto 1, se copia el trazo b, determinando el punto 2.
* En seguida desde este último punto se copia el trazo c, determinando el punto 3.
* Con línea de solución se marca el trazo P 3, que corresponde al trazo S, equivalente a la suma de los trazos dados.

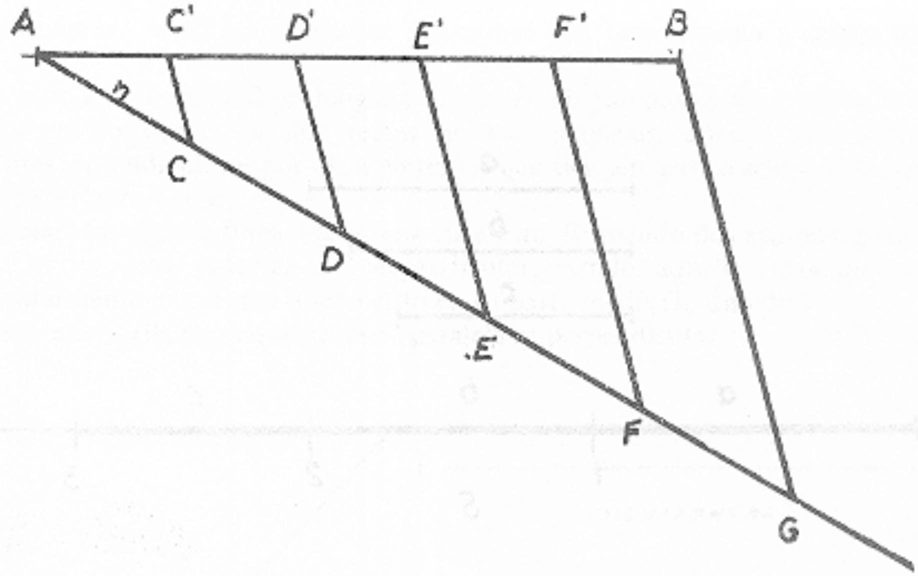
RESTA DE TRAZOS: a – b = S



Dados los trazos a y b, establecer su diferencia:

* Dibujar un rayo P.
* Copiar el trazo a desde P, determinando el punto 1.
* A partir del punto 1 se copia el trazo b, descontándolo del trazo anterior; se determina el punto 2.
* Con línea de solución se marca el trazo P 2 que corresponde al trazo S, equivalente a la diferencia de los trazos dados.

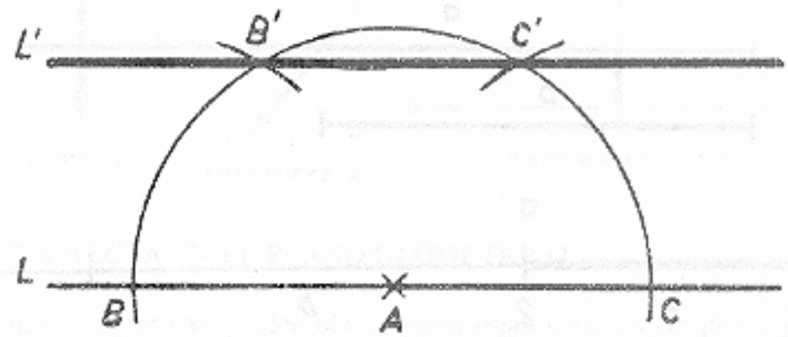
DIVIDIR UN TRAZO EN SEGMENTOS IGUALES



Dado el trazo AB, dividirlo en cinco partes iguales:

* Dibujar el trazo AB.
* A partir del punto A, dibujar un rayo que forme ángulo con el trazo AB y cuya magnitud angular corresponda a 45º o menos.
* Con una magnitud n aplicada cinco veces sobre el rayo, determinamos los puntos C, D, E, F y G.
* Se une G con B. A partir de los puntos F, E, D y C, se dibujan rectas paralelas a GB, determinando los puntos F', E', D' y C'.
* Los segmentos que se determinan son iguales entre sí y cada uno de ellos es igual a la quinta parte del trazo AB.

DIBUJAR UNA PARALELA L' // L

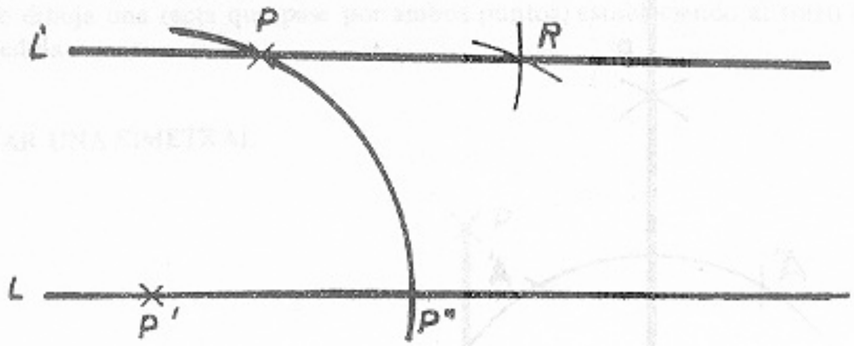


Dada la recta L, dibujar una recta L' que sea paralela:

* Dibujar la recta L.
* Sobre la recta L, se ubica un punto A.
* Con magnitud de radio n se dibuja un arco que corte la recta L en los puntos B y C.
* Con igual magnitud de radio se corta el arco en B' y C', con centro en B y C, respectivamente.
* Se dibuja la recta L' que pase por los puntos B' y C'.

Nota: Para rectas paralelas de mayor magnitud, efectúese en ambos extremos igual ejercicio, pasando la recta L' por los puntos que se determinen.

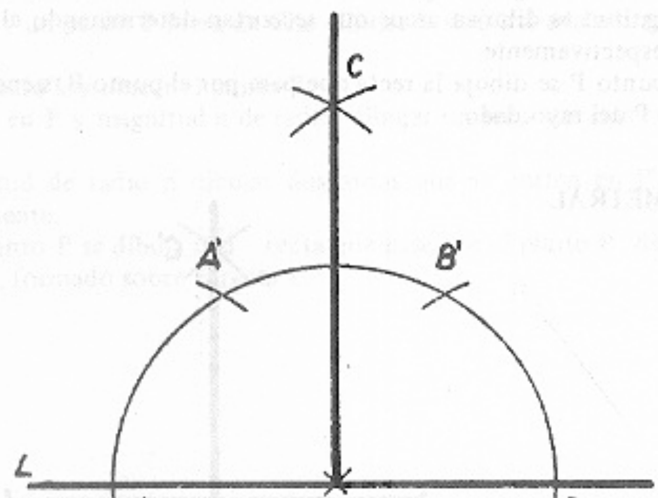
DIBUJAR UNA PARALELA QUE PASE POR UN PUNTO: L' // L



Dada la recta L y el punto P, dibujar una recta L' que sea paralela a ella:

* Dibujar la recta L y situar el punto P.
* Sobre la recta L ubicar el punto P'.
* Con centro en P' y magnitud P'P, dibujar un arco que corte la recta L en P''.
* Con igual magnitud y centro en P'' y P, respectivamente, dibujar arcos que se corten, determinando el punto R.
* Se dibuja la recta L' que pase por los puntos P y R.

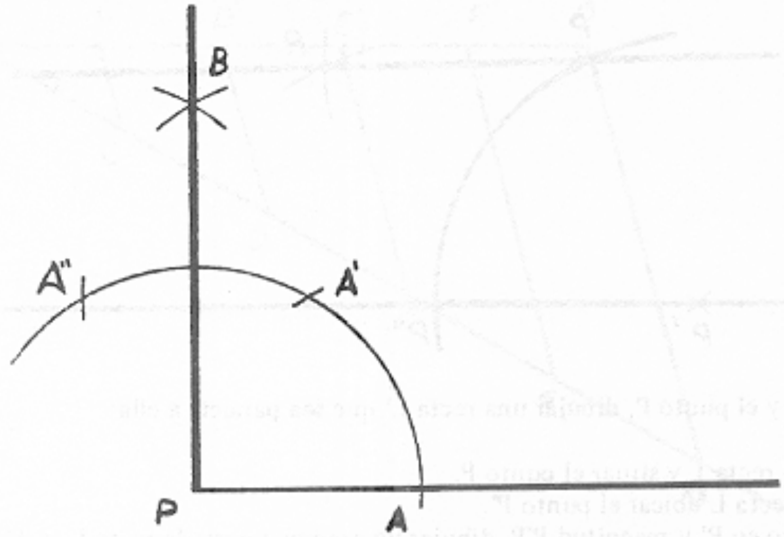
DIBUJAR UNA PERPENDICULAR



Dada la recta L, levantar una perpendicular en cualquier punto de ella:

* Dibujar la recta L.
* Determinar la ubicación donde se levantará la perpendicular con un punto P.
* Con magnitud de radio n se dibuja un arco que corte a la recta en los puntos A y B, con centro en P.
* Con igual magnitud se corta el arco en A' y B' con centro en A y B, respectivamente.
* Con igual magnitud dibujar arcos que se corten, determinando el punto C, con centro en A' y B', respectivamente.
* A partir del punto P se dibuja la recta que pase por el punto C, quedando ésta perpendicular a la recta L.

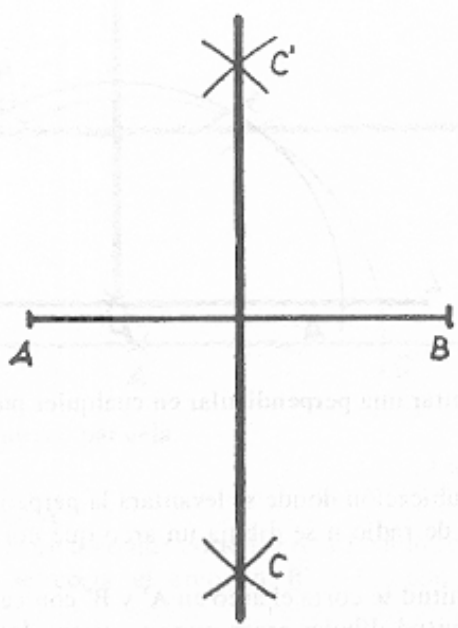
DIBUJAR UNA PERPENDICULAR EN UN EXTREMO



Dado el rayo P levantar en su extremo una perpendicular:

* Dibujar un rayo P.
* Con magnitud n y centro en el punto P, dibujar un arco que corte el rayo en el punto A.
* Con igual magnitud y centro en A se corta el arco en el punto A'.
* Desde este punto y con igual magnitud se corta nuevamente el arco en A''.
* Con igual magnitud se dibujan arcos que se cortan determinando el punto B, con centro en A' y A'', respectivamente.
* A partir del punto P se dibuja la recta que pase por el punto B, siendo ésta perpendicular en el extremo P del rayo dado.

DIBUJAR UNA SIMETRAL

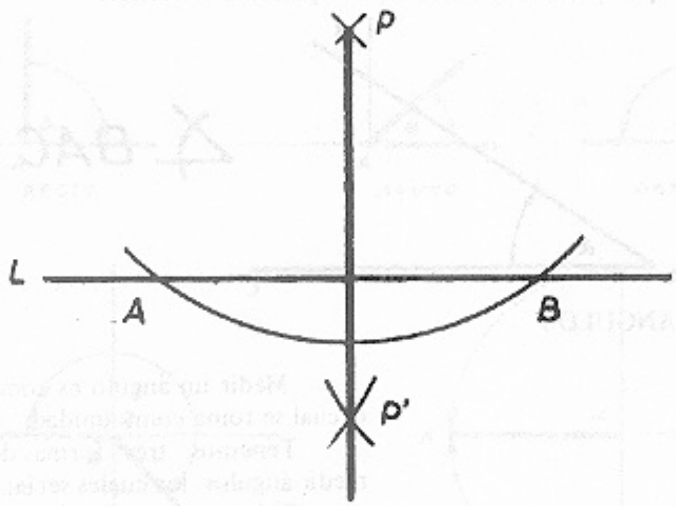


Dado un trazo AB, dibujar la simetral:

* Dibujar el trazo AB.

* Con una magnitud de radio n, centro en A y B, respectivamente, dibujar arcos alternadamente que se corten determinando los puntos C y C'.
* Se dibuja una recta que pase por ambos puntos, estableciendo al trazo dado, la simetral pedida.

DIBUJAR UNA SIMETRAL



Dada una recta L y un punto P fuera de ella, dibujar la simetral a la recta:

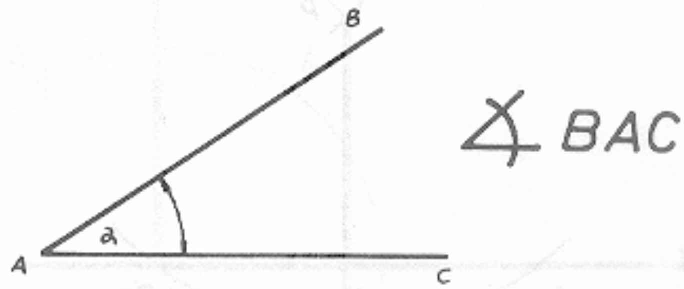
* Dibujar la recta L y ubicar el punto P.
* Con centro en P y magnitud n de radio, dibujar un arco que corte a la recta en los puntos A y B.
* Con magnitud de radio n dibujar dos arcos que se corten en P' con centro en A y B, respectivamente.
* Desde el punto P se dibuja una recta que pase por el punto P', determinando la simetral al trazo AB, formado sobre la recta L.

LOS ANGULOS

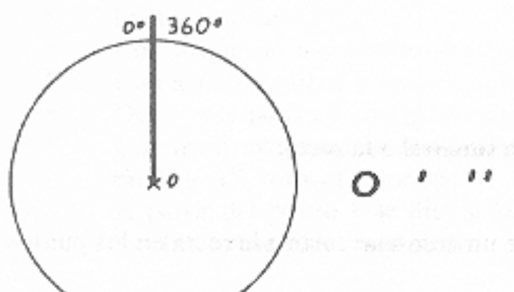
A.– DEFINICION DE ANGULO

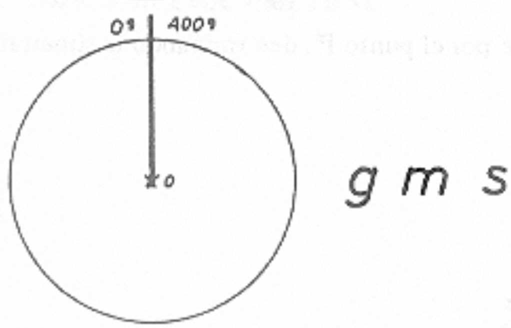
Angulo es la unión de dos semirrectas o rayos de origen común llamado vértice.

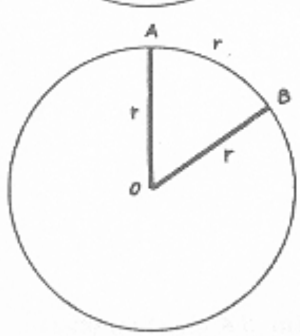
Las semirrectas o rayos que forman el ángulo se llaman lados. El ángulo se designa por una letra griega colocada dentro del ángulo. Para expresar un ángulo se usan también tres letras mayúsculas de manera que quede al centro la que representa el vértice.



B.– MEDICION DE ANGULOS







Medir un ángulo es compararlo con otro, el cual se toma como unidad.

Tenemos tres formas de sistemas para medir ángulos, los cuales serían:

Sistema sexagesimal: que consiste en dividir la circunferencia en 360 partes iguales llamadas grados sexagesimales (°), los cuales se dividen en 60 partes iguales llamadas minutos sexagesimales ('), los cuales a su vez se dividen también en 60 partes iguales llamadas segundos (''). Este sistema es el más antiguo, ya que fue implantado por los babilonios y es de uso más generalizado en nuestro país.

Sistema centesimal: que consiste en dividir la circunferencia en 400 partes iguales llamadas grados centesimales (^{g}), los cuales se dividen en 100 partes iguales llamadas minutos centesimales (^{m}), los cuales a su vez se dividen en 100 partes iguales llamadas segundos centesimales (^{s}). Este sistema es moderno y se usa en algunas especialidades técnicas.

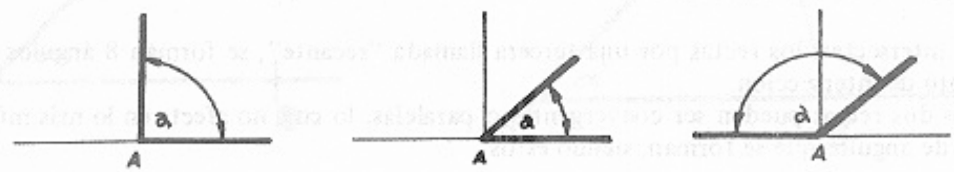
Sistema circular: en este sistema se usa como unidad de medida el ángulo llamado radián. El radián es el ángulo cuyos lados comprenden un arco de longitud igual al radio de la circunferencia, vale decir, que si tenemos un ángulo AOB y la longitud de AB es igual a AO o a BO (r), diremos que el ángulo AOB es igual a un radián. Como la longitud de una circunferencia es igual a 2 Pi radios, resultaría entonces que un ángulo de 360 grados a 2 Pi radianes, vale decir, 6,28 radianes, otorgándole a Pi un valor de 3,1416. Un radián equivale a 57° 18'.

C.– TIPOS DE ANGULOS

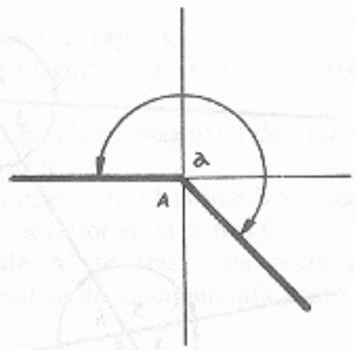
Los ángulos se dividen en dos grupos, que serían los cóncavos y los convexos.

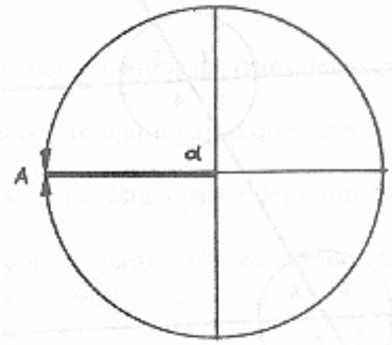
Los ángulos cóncavos son aquellos que tienen desde 1 segundo hasta 180 grados, conociéndolos por los nombres de: recto, al que mide 90 grados; agudo al que mide menos de 90 grados y obtuso, al que mide más de 90 grados (Sistema sexagesimal).

ANGULOS CONCAVOS



RECTO AGUDO OBTUSO



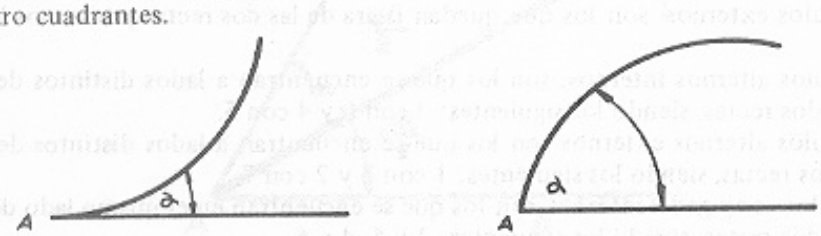


CONVEXO COMPLETO O DE GIRO

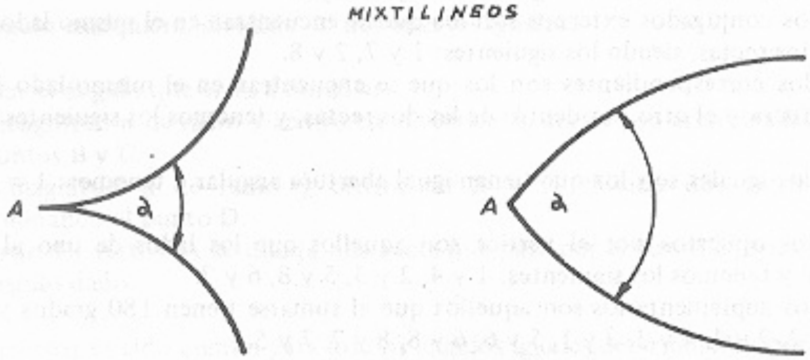
Los ángulos convexos son aquellos que tienen desde 180 grados hasta 360 grados, llamándosele a este último completo o de giro.

De lo dicho anteriormente se desprende que la circunferencia tiene 4 ángulos rectos, dos extendidos o llanos y uno completo o de giro.

A la cuarta parte de la circunferencia se le denomina también por cuadrante, teniendo entonces cuatro cuadrantes.



MIXTILINEOS



CURVILINEOS

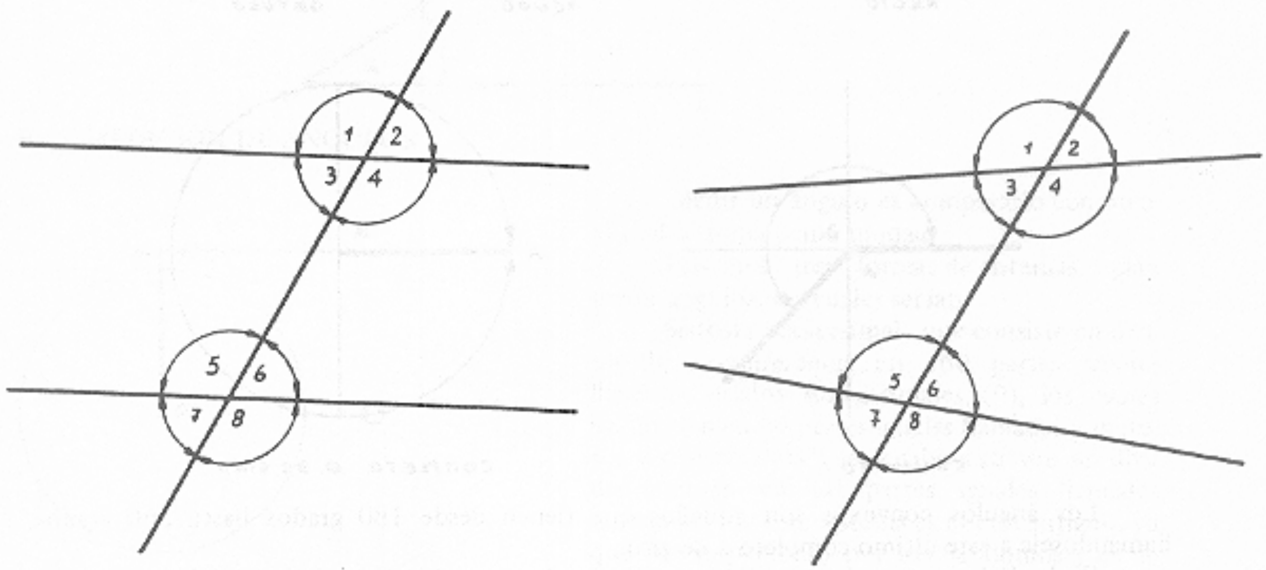
Hasta el momento se ha supuesto de que los lados de los ángulos son semirrectas como se dijo al principio, pero si no lo fueran, quedaría la posibilidad de que fueran mixtilíneos o curvilíneos.

Se entiende por un ángulo mixtilíneo aquel que se compone de un lado recto y otro curvo, ahora bien, si los dos lados que lo componen fueran curvos, tomarían el nombre de curvilíneos.

D.– TEORIA DE LOS ANGULOS

Al intersectar dos rectas por una tercera llamada "secante", se forman 8 ángulos y 4 en cada punto de intersección.

Las dos rectas pueden ser convergentes o paralelas, lo cual no afecta en lo más mínimo a los tipos de ángulos que se forman, siendo estos:



a) Angulos internos, son los que quedan dentro de las dos rectas y tenemos los siguientes: 3, 4, 5 y 6.

b) Angulos externos, son los que quedan fuera de las dos rectas y tenemos los siguientes: 1, 2, 7 y 8.

c) Angulos alternos internos, son los que se encuentran a lados distintos de la secante y dentro de las dos rectas, siendo los siguientes: 3 con 6 y 4 con 5.

d) Angulos alternos externos son los que se encuentran a lados distintos de la secante y fuera de las dos rectas, siendo los siguientes: 1 con 8 y 2 con 7.

e) Angulos conjugados internos son los que se encuentran en el mismo lado de la secante y dentro de las dos rectas, siendo los siguientes: 3 y 5, 4 y 6.

f) Angulos conjugados externos son los que se encuentran en el mismo lado de la secante y fuera de las dos rectas, siendo los siguientes: 1 y 7, 2 y 8.

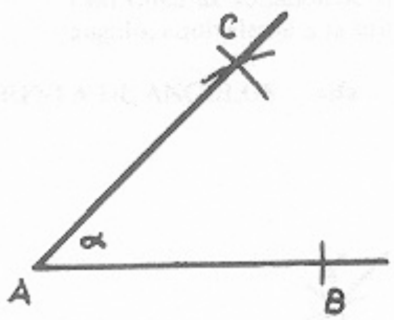
g) Angulos correspondientes son los que se encuentran en el mismo lado de la secante, pero uno por fuera y el otro por dentro de las dos rectas, y tenemos los siguientes: 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8.

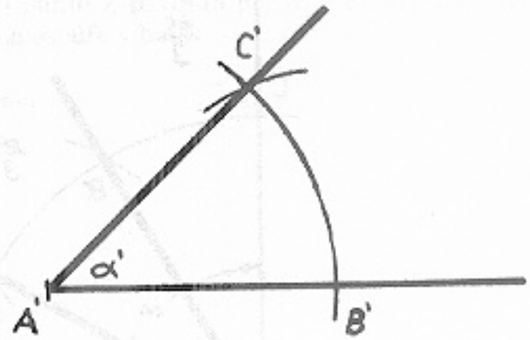
h) Angulos iguales son los que tienen igual abertura angular y tenemos: 1 = 4, 2 = 3, 5 = 8 y 6 = 7.

i) Angulos opuestos por el vértice son aquellos que los lados de uno al prolongarlos forman el otro, y tenemos los siguientes: 1 y 4, 2 y 3, 5 y 8, 6 y 7.

j) Angulos suplementarios son aquellos que al sumarse tienen 180 grados y tenemos los siguientes: 1 y 2, 2 y 4, 4 y 3, 3 y 1, 5 y 6, 6 y 8, 8 y 7, 7 y 5.

COPIAR UN ANGULO alfa = alfa'

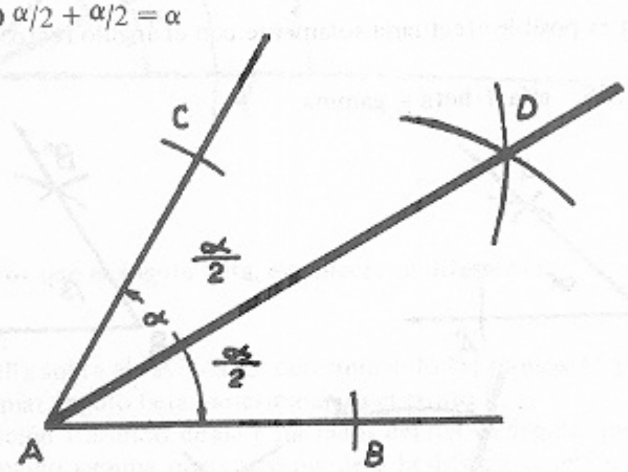




Dado el ángulo alfa dibujar otro igual.

* Dibujar un rayo A'.
* Con magnitud de arco n y centro en A se cortan con arcos los lados del ángulo dado en B y C.
* Con la misma magnitud de arco y centro en A', dibujar un arco que corte el rayo A' en el punto B'.
* Con centro en el punto B y magnitud BC, se copia ésta a partir del punto B', cortando el arco anterior en el punto C'.
* Desde A' se traza una recta que pase por el punto C', quedando de este modo determinado el ángulo alfa prima igual al ángulo dado.

BISECTAR UN ANGULO $\alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$

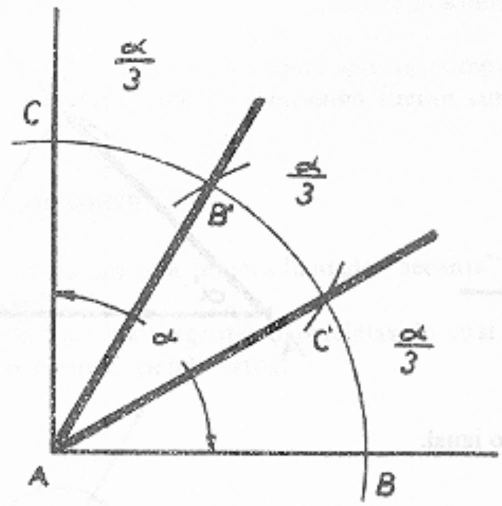


Dado un ángulo cualquiera, dividirlo en dos ángulos iguales:

* Dibujar el ángulo que se va a dimidiar.
* Con magnitud n de radio y centro en el vértice A, cortar con arcos los lados del ángulo en los puntos B y C.
* Con magnitud n de radio y centro en B y C, dibujar dos arcos que se corten, determinando el punto D.
* A partir del vértice A se dibuja una recta que pase por el punto D, siendo ella la bisectriz del ángulo dado.

Nota: La bisectriz es lado común para los dos ángulos iguales determinados por la bisección.

TRISECTAR UN ANGULO RECTO $\alpha/3 + \alpha/3 + \alpha/3 = \alpha$

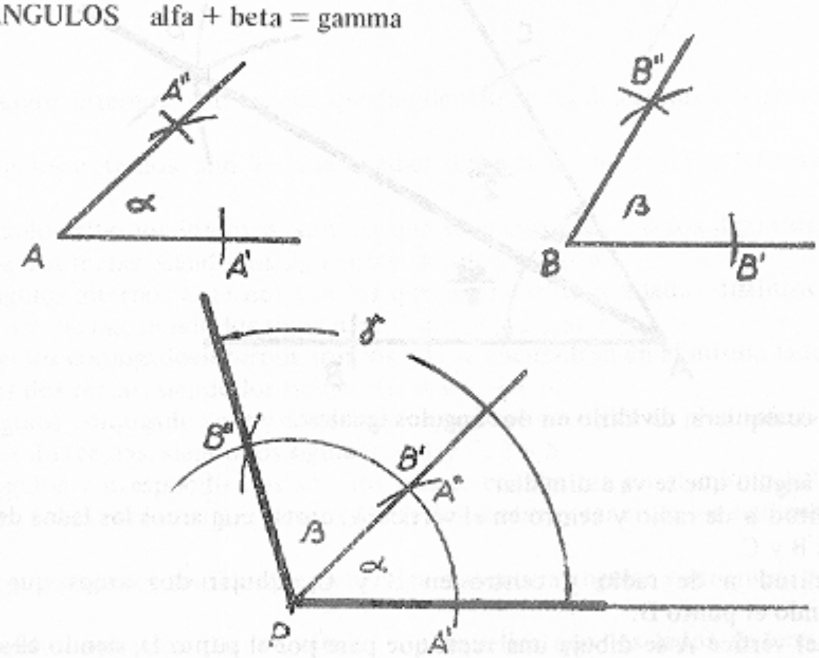


Dado un ángulo recto (90º), dividirlo en tres partes iguales:

* Dibujar el ángulo recto alfa.
* Con magnitud n de radio y centro en vértice A, cortar con un arco los lados del ángulo, determinando los puntos B y C.
* Con igual magnitud de radio n y centro en B, cortar el arco en el punto B'.
* Con igual magnitud de radio n y centro en C, cortar el arco en C'.
* Desde el vértice A se dibujan dos rectas que pasen por los puntos B' y C', determinando tres ángulos iguales.

Nota: La trisección es posible efectuarla solamente con el ángulo recto.

SUMA DE ANGULOS alfa + beta = gamma

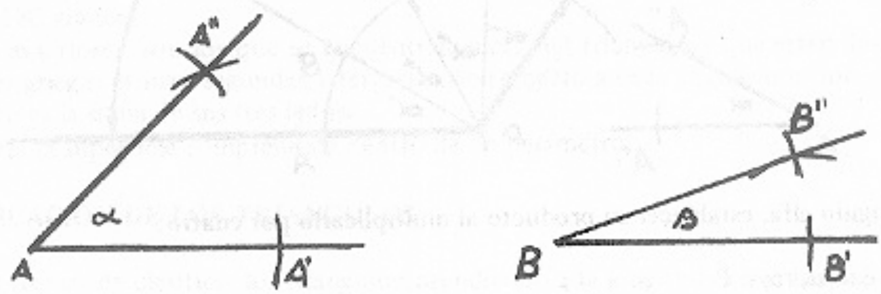


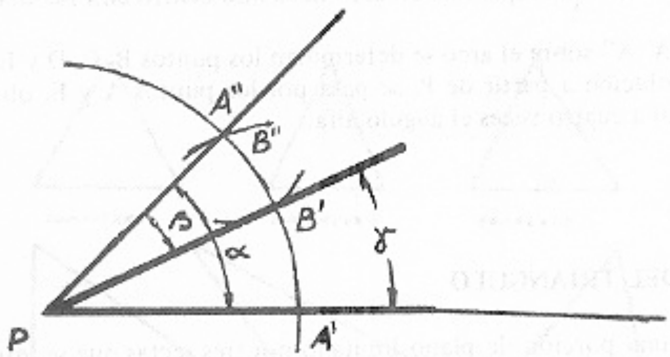
Dado los ángulos alfa y beta, determinar su adición:

* Dibujar un rayo P.

* Copiar ángulo alfa sobre el lado dado, determinando los puntos A' y A''.
* A partir de A'' copiar el ángulo beta, determinando el punto B'' sobre el arco.
* Con línea de solución se traza desde el punto P pasando por A' y B'' los lados del nuevo ángulo, equivalente a la suma de los ángulos alfa y beta.

RESTA DE ANGULOS alfa – beta = gamma

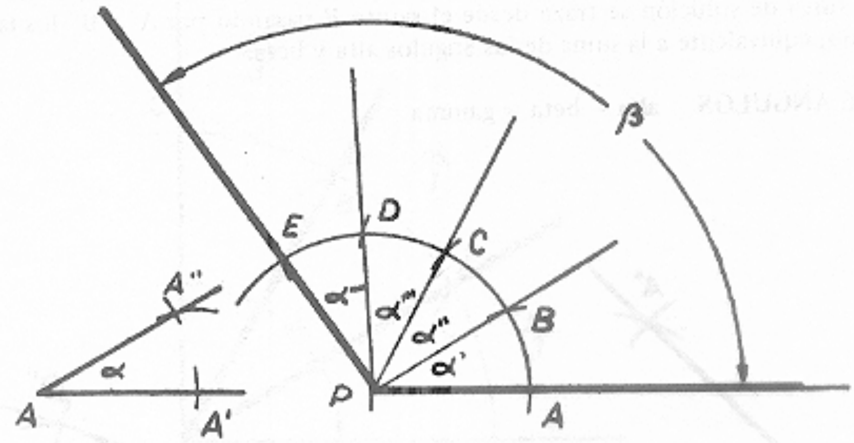




Dado el ángulo alfa mayor que el ángulo beta, establecer su diferencia:

* Dibujar un rayo P.
* Copiar el ángulo alfa sobre el rayo dado, determinando los puntos A' y A''.
* A partir de A'' copiar ángulo beta, determinando el punto B.
* Con línea de solución trazando desde P los lados del nuevo ángulo que pasen por A' y B', se determina el ángulo gamma que corresponde a la diferencia de los ángulos alfa y beta.

MULTIPLICAR ANGULOS   alfa x 4 = beta



Dado el ángulo alfa, establecer su producto al multiplicarlo por cuatro:

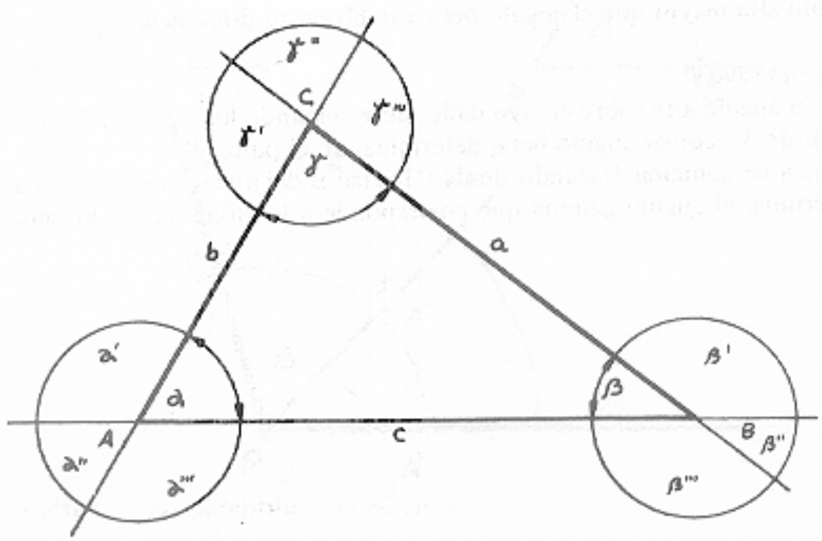
* Dibujar un rayo P.
* Con magnitud de radio n copiamos un arco haciendo centro en P; se determina el punto A sobre el rayo.
* Con magnitud A' A" sobre el arco se determinan los puntos B, C, D y E.
* Con línea de solución a partir de P, se pasa por los puntos A y E, obteniendo el ángulo beta que es igual a cuatro veces el ángulo alfa.

LOS TRIANGULOS

A.– DEFINICION DEL TRIANGULO

El triángulo es una porción de plano limitado por tres rectas que se intersectan de dos en dos, por lo tanto, es un polígono de tres lados.

Para el mejor estudio de los triángulos, es conveniente separarlos del resto de los polígonos.



B.– ELEMENTOS DE UN TRIANGULO

Un triángulo tiene los siguientes elementos que lo forman:

a. Lados, son las rectas que lo limitan y que se designan por letras minúsculas: a, b, y c, colocadas contrarias a los vértices de la misma letra.

b. Vértices, son los puntos de intersección de las rectas y se designan por letras mayúsculas: A, B y C, colocadas en sentido contrario a los minuteros de un reloj (de izquierda a derecha).

c. Angulos interiores, son los que se encuentran dentro del triángulo y se designan mediante letras griegas en forma correlativa de los vértices y son: alfa, beta y gamma. (La suma de ellos da 180 grados).

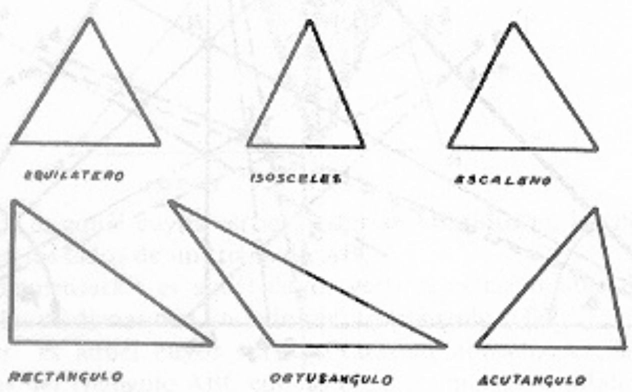
d. Angulos exteriores, son los que se encuentran fuera del triángulo y que están designados con letras griegas primas, segundas y terceras con respecto a cada ángulo interior.

e. Perímetro es la suma de sus tres lados.

f. Area, sería la superficie comprendida dentro de un perímetro.

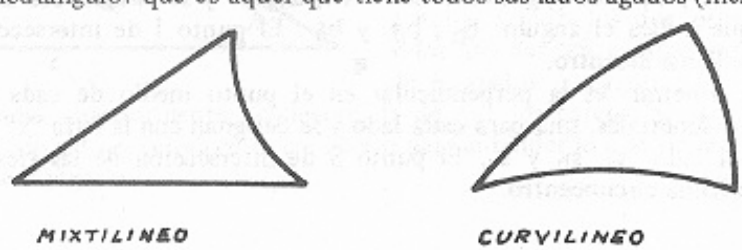
C.– CLASIFICACION DE LOS TRIANGULOS

Hay dos formas de clasificar los triángulos, atendiendo a la longitud de sus lados o bien en base a los ángulos interiores que lo forman.



a. De acuerdo a la longitud de sus lados, tenemos:
Triángulo equilátero: que es aquél que tiene sus tres lados de igual longitud, siendo por lo tanto, un polígono regular.
Triángulo isósceles: que es aquél que tiene dos lados iguales, siendo el tercero mayor o menor que los dos anteriores.
Triángulo escaleno, que es aquél que no tiene ningún lado igual.

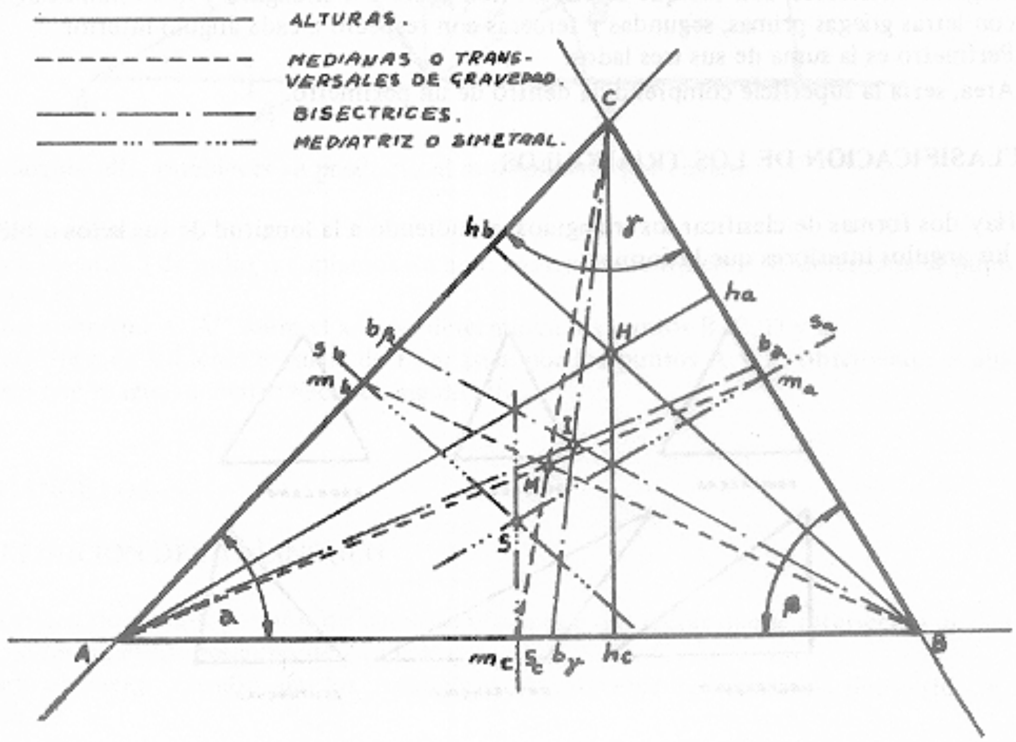
b. Atendiendo a sus ángulos, tenemos:
Triángulo rectángulo: que es aquél que tiene uno de sus ángulos interiores de 90 grados (recto).
Triángulo obtusángulo: que es aquél que tiene un angulo interior obtuso (más de 90 grados).
Trángulo acutángulo: que es aquél que tiene todos sus lados agudos (menos de un recto).



Hasta el momento se ha dicho que los lados de los triángulos son líneas rectas, pero si no lo fueran, tomarían los siguientes nombres: mixtilíneo al que se compone de lados rectos y curvos; y curvilíneo, aquél cuyos lados son líneas curvas.

D.– ELEMENTOS NOTABLES O SINGULARES DE UN TRIANGULO

Todos los triángulos tienen ciertos elementos, tales como: puntos y rectas, que cumplen con ciertas condiciones dentro de los triángulos y es por eso que se les ha llamado elementos notables, los cuales serían: las alturas, las medianas o transversales de gravedad, las bisectrices y las mediatrices o simetrales.



a. Altura: es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación. Hay tres alturas; una correspondiente a cada lado y se designan con la letra "h" y un subíndice que indica el lado: h_a, h_b y h_c. El punto H donde concurren las tres alturas se llama **ortocentro.**

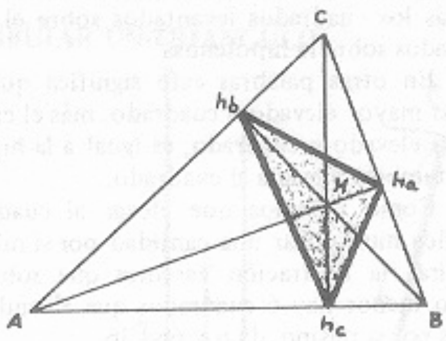
b. Mediana o transversal de gravedad: es el segmento o trazo trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Hay tres medianas; una correspondiente a cada lado y se designan con la letra "m" y un subíndice que indica el lado: m_a, m_b y m_c. El punto M de intersección de las tres medianas o transversales de gravedad se llama **baricentro.**

c. Bisectriz: es la recta notable que divide un ángulo en dos partes iguales. Hay tres bisectrices; una para cada ángulo interior del triángulo y se designa con la letra "b" y un subíndice que indica el ángulo: b_α , b_β y b_δ . El punto I de intersección de las tres bisectrices se llama **incentro.**

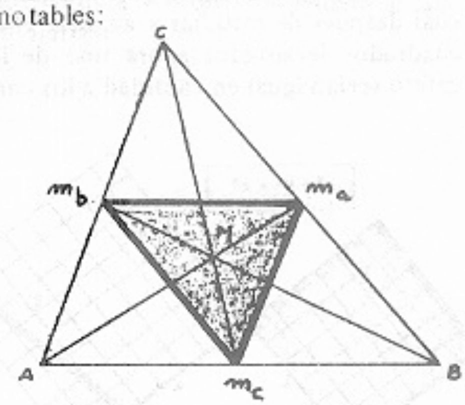
d. Mediatriz o simetral: es la perpendicular en el punto medio de cada lado. Hay tres mediatrices o simetrales, una para cada lado y se designan con la letra "s" y un subíndice que indica el lado: s_a, s_b y s_c. El punto S de intersección de las tres mediatrices o simetrales se llama **circuncentro.**

E.– TRIANGULOS NOTABLES

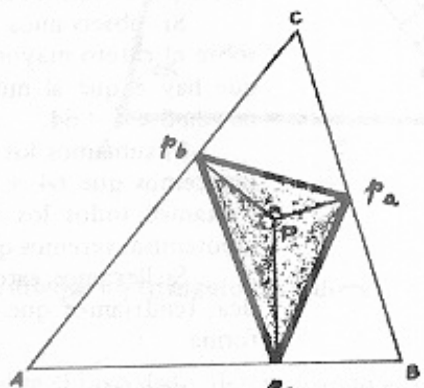
Si dentro de un triángulo trazamos otro que cumpla ciertas condiciones en base a los elementos notables, tendremos los siguientes triángulos notables:



ORTICO



COMPLEMENTARIO



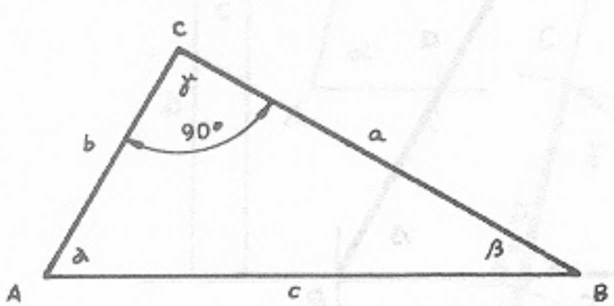
PODAR

a. Triángulo órtico: es aquél cuyos vértices estarían ubicados en los puntos de intersección de las alturas con los lados de un triángulo ABC.

b. Triángulo complementario: es aquél cuyos vértices estarían ubicados en los puntos de intersección de las medianas con los lados de un triángulo ABC.

c. Triángulo podar: es aquél cuyos vértices estarían ubicados en las intersecciones que forman los lados del triángulo ABC con las proyecciones perpendiculares de un punto P a cada lado del triángulo, estando el punto P ubicado en cualquier lugar dentro del triángulo.

F.– ELEMENTOS DEL TRIANGULO RECTANGULO



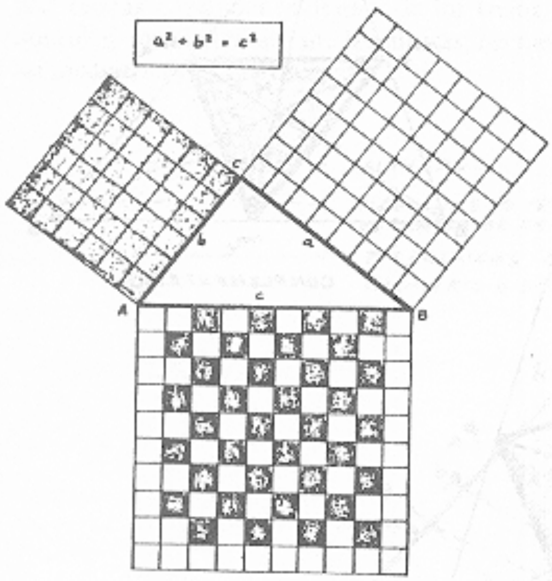
Un triángulo rectángulo tiene, como ya se sabe, tres lados: a, b y c, pero para diferenciarlos unos de otros, toman los siguientes nombres: al lado b se le llama "cateto menor", al lado a se le llama "cateto mayor" y al lado c se le llama "hipotenusa".

Los ángulos interiores serían: alfa, beta y gamma, siendo los dos primeros de cualquier valor angular, en cambio gamma tiene que ser de 90 grados, o sea, recto.

De lo dicho anteriormente, se desprende de que los catetos serían los que forman el ángulo recto. Todo esto es importante conocerlo para entender lo que viene a continuación, que es el teorema de Pitágoras.

G.– TEOREMA DE PITAGORAS

En la introducción ya se habló de este personaje tan discutido que se llamó Pitágoras, el cual después de estudiar y analizar el triángulo rectángulo, llegó a la siguiente conclusión: "Los cuadrados levantados sobre uno de los catetos, más los cuadrados levantados sobre el otro cateto serían igual en cantidad a los cuadrados levantados sobre la hipotenusa".



En otras palabras esto significa que: el cateto mayor elevado a cuadrado, más el cateto menor elevado a cuadrado, es igual a la hipotenusa también elevada al cuadrado.

Como sabemos que elevar al cuadrado significa multiplicar una cantidad por si misma, al mirar la ilustración veremos que sobre el cateto menor hay 6 cuadrados que al multiplicarlos por si mismo, da 6 x 6 = 36.

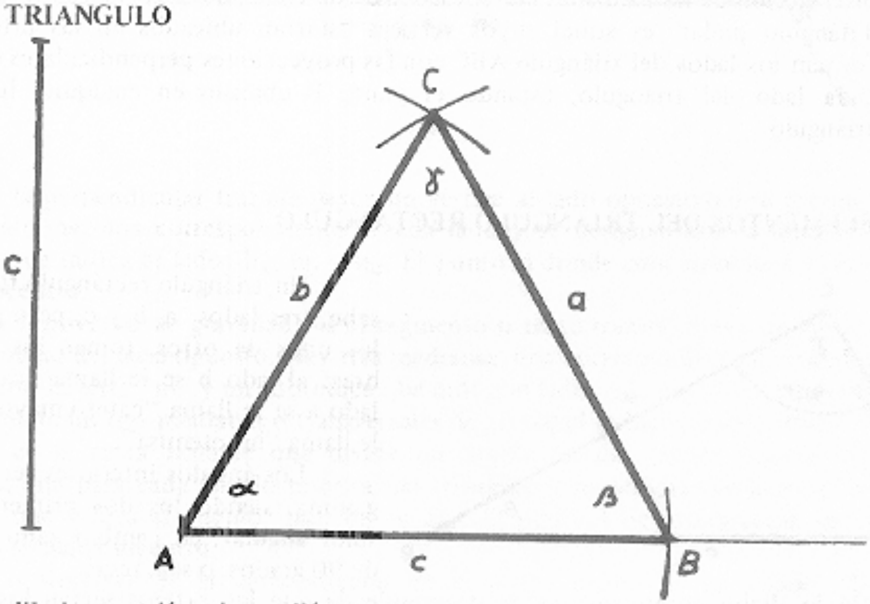
Si observamos los cuadrados que hay sobre el cateto mayor y los contamos, veremos que hay 8 que al multiplicarlos por si mismo, nos da 8 x 8 = 64.

Si sumamos los dos productos obtenidos, tendremos que 64 + 36 = 100; ahora bien, si contamos todos los cuadrados que hay en la hipotenusa, veremos que son 100 (10 x 10).

Si llevamos esto a una fórmula matemática, tendríamos que expresarlo de la siguiente forma:

$a^2 + b^2 = c^2$ al reemplazar los valores tenemos que:
$8^2 + 6^2 = 10^2$ elevamos al cuadrado y tenemos que:
$64 + 36 = 100$ lo cual confirma lo dicho anteriormente.

DIBUJAR UN TRIANGULO

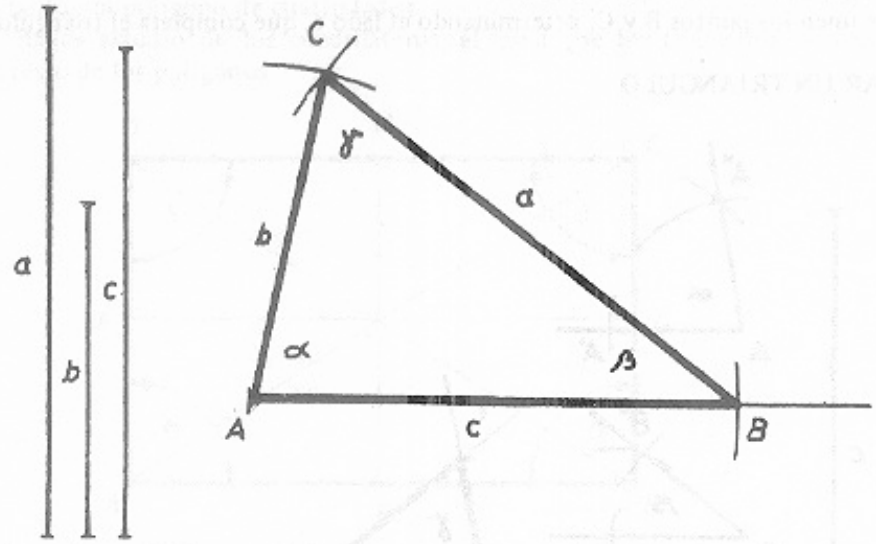


Dado el lado c, dibujar un triángulo equilátero:

* Dibujar un rayo A

* Copiar el lado c sobre el rayo dado, obteniendo el punto B.
* Con igual magnitud dibujar dos arcos que se corten en el punto C.
* Se unen los puntos A, B y C, determinando los lados a y b que son iguales al lado c, dando origen a la construcción de un triángulo equilátero.

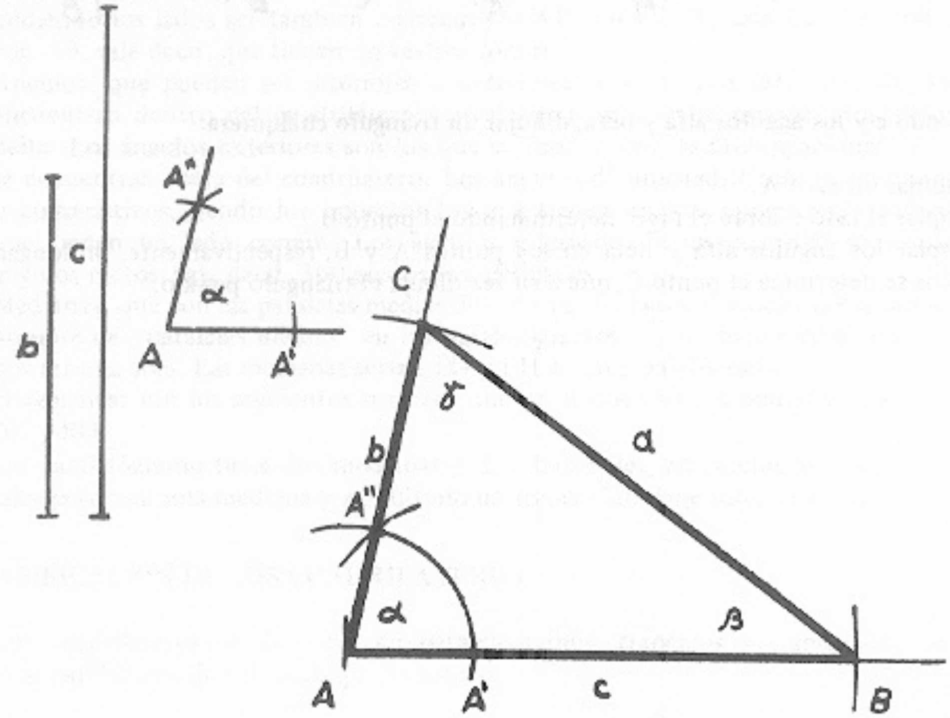
DIBUJAR UN TRIANGULO



Dados los lados a, b y c, dibujar un triángulo cualquiera:

* Dibujar un rayo A.
* Copiar el lado c sobre el rayo dado, determinando el punto B.
* Con centro en A y magnitud b, se hace un arco.
* Con centro en B y magnitud a, cortar el arco anterior en el punto C.
* Se unen los puntos A, B y C, determinando el triángulo pedido.

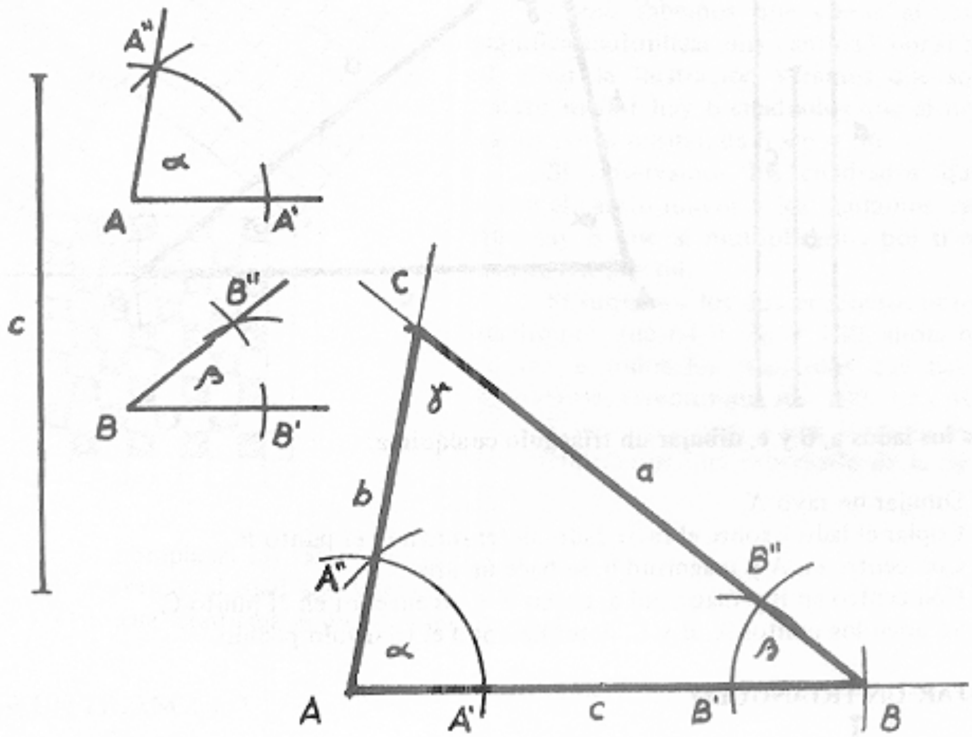
DIBUJAR UN TRIANGULO



Dado el ángulo alfa y los lados b y c, dibujar un triángulo cualquiera:

* Dibujar un rayo A.
* Copiar el ángulo alfa en el punto A.
  A partir de A copiar el lado c sobre el rayo, y b sobre el lado del ángulo alfa, obteniendo los puntos B y C, respectivamente.
* Se unen los puntos B y C, determinando el lado a, que completa el triángulo pedido.

DIBUJAR UN TRIANGULO



Dado el lado c y los ángulos alfa y beta, dibujar un triángulo cualquiera:

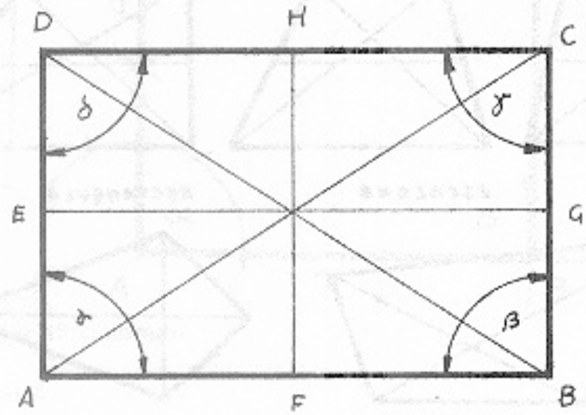
* Dibujar un rayo A.
* Copiar el lado c sobre el rayo, determinando el punto B.
* Copiar los ángulos alfa y beta en los puntos A y B, respectivamente, prolongando sus lados se determina el punto C, que a su vez dibuja el triángulo pedido.

LOS CUADRILATEROS

A. DEFINICION DE CUADRILATERO

Cuadrilátero es la unión de cuatro trazos o segmentos que se intersectan de dos en dos, siendo por lo tanto, un polígono de cuatro lados.

Para el mejor estudio de los cuadriláteros, al igual que los triángulos, es conveniente separarlos del resto de los polígonos.



B. ELEMENTOS DE UN CUADRILATERO

Un cuadrilátero tiene los siguientes elementos que los forman:

a. Vértices; que son los puntos de intersección de los segmentos o trazos que forman sus lados y que se designan por letras mayúsculas A, B, C y D, estos vértices pueden ser opuestos A con C y B con D o consecutivos A con B, B con C, C con D y D con A.

b. Lados; que son los segmentos o trazos que lo limitan AB, BC, CD y DA, estos lados pueden ser opuestos AD con BC y AB con DC, o sea, que no tienen un vértice común, pudiendo los lados ser también consecutivos AB con BC, BC con CD, CD con DA y DA con AB, vale decir, que tienen un vértice común.

c. Angulos; que pueden ser interiores o exteriores. Los ángulos interiores son los que se encuentran dentro del cuadrilátero y se designan por letras griegas, alfa, beta, gama y delta. Los ángulos exteriores son los que se forman por las prolongaciones de los lados y se encuentran fuera del cuadrilátero. Los ángulos de un cuadrilátero pueden ser opuestos o consecutivos, siendo los opuestos los que tienen vértices opuestos y consecutivos los que tienen un lado común. Los ángulos interiores de un cuadrilátero suman cuatro ángulos rectos, vale decir, 360 grados sexagesimales.

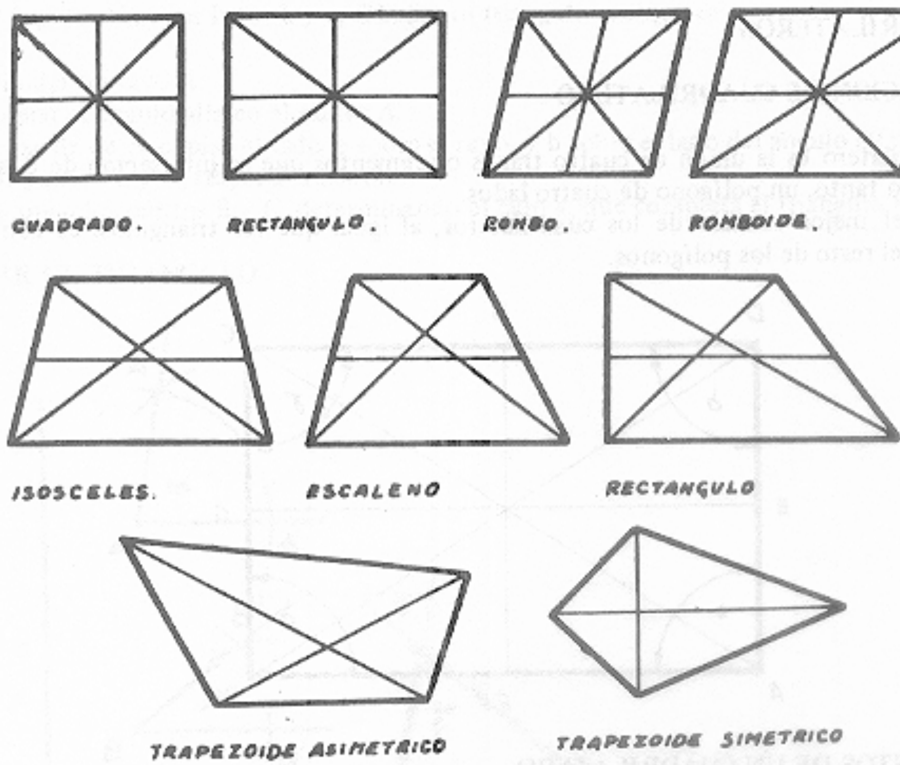
d. Medianas; que son las paralelas medias de cada par de lados, conociéndolas también por el nombre de "paralelas medias" en los paralelógramos y por "base media" en los trapecios por ser una sola. Las medianas serían EG y FH en un paralelógramo.

e. Diagonales; son los segmentos o trazos que unen dos vértices opuestos, las cuales serían AC y BD.

Un paralelógramo tiene dos medianas y dos diagonales, en cambio un trapecio tiene dos diagonales pero una sola mediana y por último un trapezoide tiene solamente dos diagonales.

C. CLASIFICACION DE LOS CUADRILATEROS

Los cuadriláteros se clasifican en paralelógramos, trapecios y trapezoide, esto es, de acuerdo al paralelismo de sus lados que lo forman.

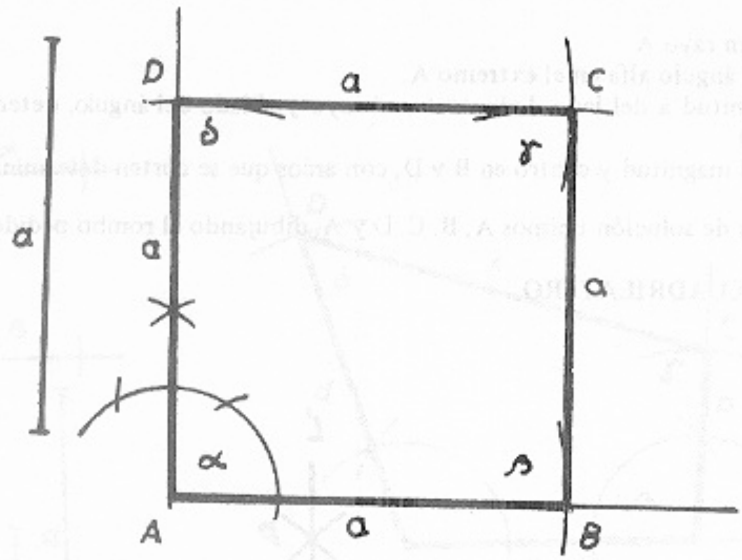


a. Paralelógramos; son aquellos cuadriláteros que tienen dos pares de lados paralelos, los cuales a su vez se subdividen en: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.
Cuadrado; es aquel que tiene sus cuatro lados de igual longitud, cuatro ángulos rectos, las dos medianas iguales al igual que las diagonales.
Rectángulo; es aquel que tiene lados iguales de dos en dos, cuatro ángulos rectos, las medianas no son iguales como si las diagonales.
Rombo; es aquel que tiene sus cuatro lados de igual longitud, tiene dos ángulos agudos y dos obtusos, medianas iguales y sus diagonales desiguales.
Romboide; es aquel que tiene lados iguales de dos en dos, dos ángulos agudos y dos obtusos, las medianas y las diagonales son desiguales.

b. Trapecios; son aquellos cuadriláteros que tienen solamente un par de lados paralelos, los cuales a su vez se subdividen en: isósceles, escaleno y rectángulo.
Trapecio isósceles; es aquel cuyos lados no paralelos son iguales, sus diagonales también son iguales, tiene dos ángulos agudos y dos obtusos.
Trapecio escaleno; es aquel cuyos lados no paralelos son desiguales, sus diagonales y ángulos interiores son también desiguales.
Trapecio rectángulo; es aquel que tiene dos ángulos interiores rectos y sus diagonales son desiguales.
Al hablar de los trapecios en forma general habría que decir que sus lados paralelos se llaman bases (superior e inferior) y como son desiguales una es la base menor y la otra la base mayor.

c. Trapezoide; es aquel cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo, pudiendo ser simétrico o asimétrico.
Los trapezoides simétricos son los que tienen dos pares de lados consecutivos iguales, siendo el primer par diferente al segundo, sus diagonales son perpendiculares entre sí y la que une los vértices donde concurren los lados iguales, es la bisectriz de los ángulos y a su vez eje de simetría del cuadrilátero.
Los trapezoides asimétricos son los que no son simétricos, siendo sus diagonales desiguales al igual que sus ángulos interiores.

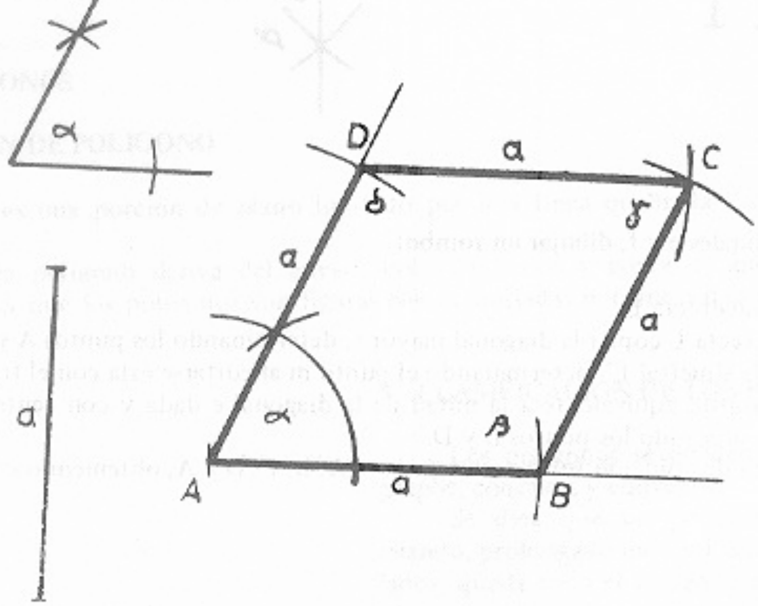
DIBUJAR UN CUADRILATERO



Dado el lado a, dibujar un cuadrado:

* Dibujar un rayo A.
* Levantar una perpendicular en el extremo A.
* Con centro en A y magnitud a, cortamos el rayo y la perpendicular determinando los puntos B y D.
* Con igual magnitud y con centro en B y D, dibujamos dos arcos que se corten, determinando el punto C.
* Con línea de solución se unen los puntos A, B, C, D y A, quedando dibujado el cuadrado pedido.

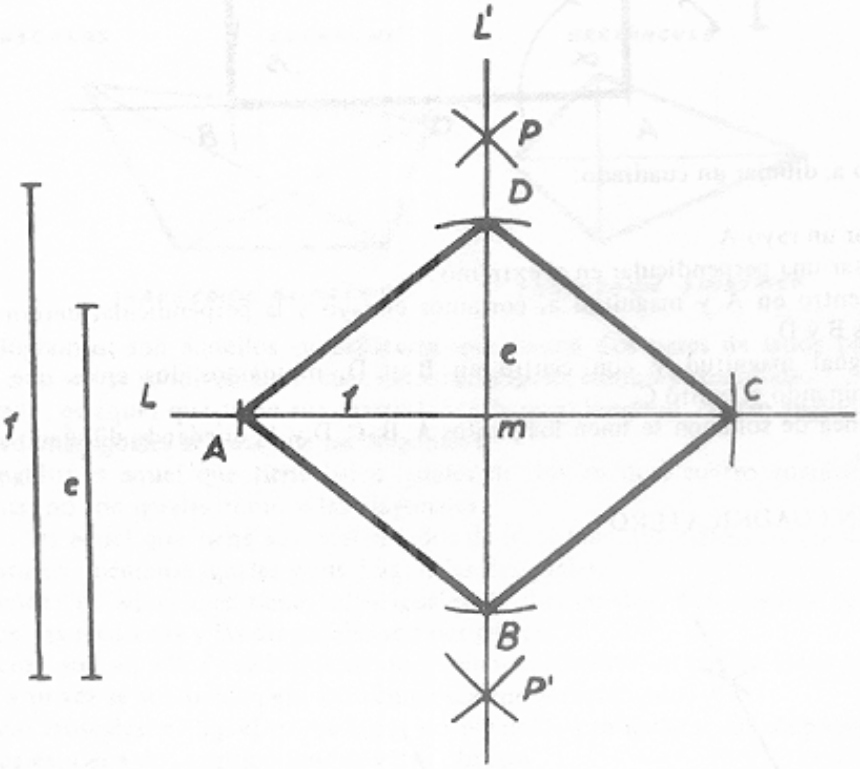
DIBUJAR UN CUADRILATERO



Dado el lado a y el ángulo alfa, dibujar un rombo:

- *	Dibujar un rayo A.
- *	Copiar el ángulo alfa en el extremo A.
- *	Con magnitud a del lado dado cortar el rayo y el lado del ángulo, determinando los puntos B y D.
- *	Con igual magnitud y centro en B y D, con arcos que se corten determinamos el punto C.
- *	Con línea de solución unimos A, B, C, D y A, dibujando el rombo pedido.

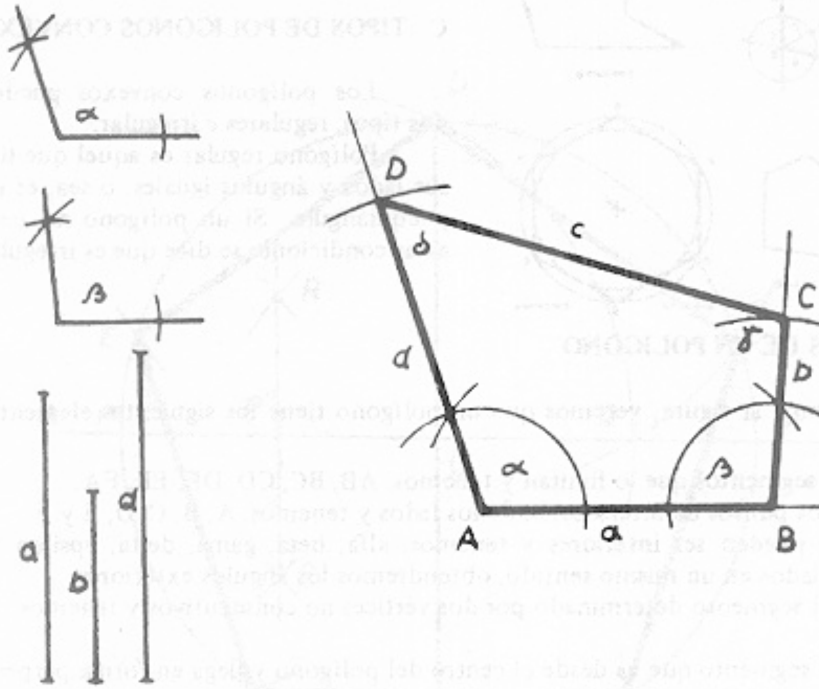
DIBUJAR UN CUADRILATERO



Dadas las diagonales e y f, dibujar un rombo:

- *	Dibujar una recta L.
- *	Sobre la recta L copiar la diagonal mayor f, determinando los puntos A y C.
- *	Dibujar la simetral L`, determinando el punto m al cortarse ésta con el trazo AC.
- *	Con magnitud equivalente a la mitad de la diagonal e dada y con centro en m, cortar la simetral, ubicando los puntos B y D.
- *	Con línea de solución se unen los puntos A, B, C, D y A, obteniéndose el rombo pedido.

DIBUJAR UN CUADRILATERO



Dados los lados a, b, d y los ángulos α y β, dibujar un trapezoide:

* Dibujar un rayo A.
* Sobre el rayo copiar el lado a, determinando el punto B.
* Con centro en los puntos A y B, copiar los ángulos α y β respectivamente.
* Desde los puntos A y B, en las prolongaciones de los ángulos α y β, copiamos los lados d y b, respectivamente, determinando los puntos D y C.
* Se une D con C, obteniendo el lado c, y con línea de solución unimos los puntos A, B, C, D y A, dibujándose el trapezoide pedido.

OTROS POLIGONOS

A. DEFINICION DE POLIGONO

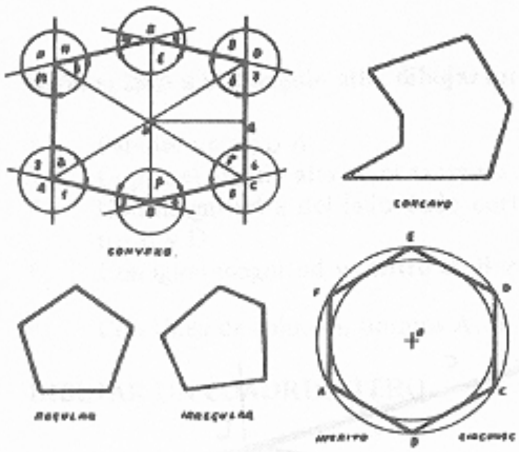
Polígono es una porción de plano limitado por una línea quebrada y cerrada, llamada línea poligonal.

La palabra polígono deriva del griego, polys = varios y gonos = ángulo, de donde podemos deducir que los polígonos son figuras planas limitadas por líneas que forman ángulos.

B. CLASIFICACION DE LOS POLIGONOS

Los polígonos se dividen en dos grandes grupos, cóncavos y convexos.

Se dice que un polígono es convexo cuando, prolongado indefinidamente uno de sus lados, queda todo el polígono a un mismo lado



con relación a él; en el caso contrario se dice que es cóncavo.

C. TIPOS DE POLIGONOS CONVEXOS

Los polígonos convexos pueden ser de dos tipos, regulares e irregular.

Polígono regular es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales, o sea, es equilátero y equiángulo. Si un polígono no cumple con estas condiciones se dice que es irregular.

D. ELEMENTOS DE UN POLIGONO

Si observamos la figura, veremos que un polígono tiene los siguientes elementos que lo componen:

a. Lados; son los segmentos que lo limitan y tenemos, AB, BC, CD, DE, EF, FA.
b. Vértices; son los puntos de intersección de los lados y tenemos, A, B, C, D, E y F.
c. Angulos; que pueden ser interiores y tenemos, alfa, beta, gama, delta, epsilon y zeta, si prolongamos los lados en un mismo sentido, obtendremos los ángulos exteriores.
d. Diagonal; es el segmento determinado por dos vértices no consecutivos y tenemos: AD, BE y CF.
e. Apotema; es el segmento que va desde el centro del polígono y llega en forma perpendicular a la mitad de un lado OG.
f. Perímetro; es la longitud de su contorno, o sea, la suma de sus lados.
g. Area; es la superficie comprendida dentro de sus lados (poligonal).

Un polígono con respecto a una circunsferencia puede estar inscrito o circunscrito a ella.

Polígono inscrito sería aquel cuyos vértices estarían en la circunferencia, vale decir, sus lados serían cuerdas de ella.

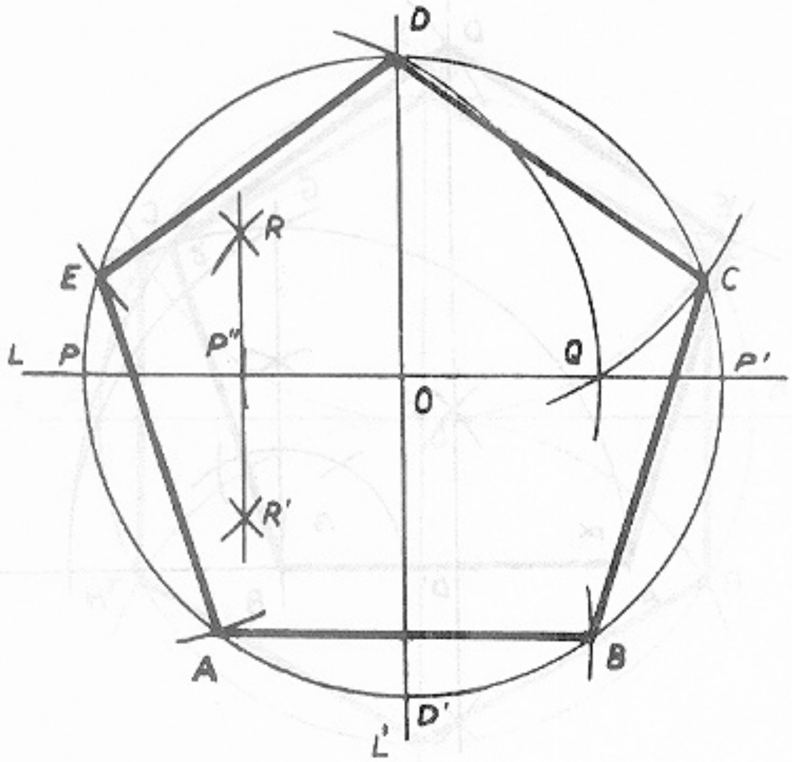
Polígono cincunscrito sería aquel que se encuentra fuera de la circunferencia, vale decir, sus lados serían tangentes a ella.

E. NOMBRES QUE TOMAN LOS POLIGONOS

De acuerdo con el número de lados, los polígonos reciben nombres especiales y serían los siguientes:

Tres lados	Triángulo
Cuatro lados	Cuadrilátero
Cinco lados	Pentágono
Seis lados	Exágono
Siete lados	Eptágono
Ocho lados	Octágono
Nueve lados	Eneágono
Diez lados	Decágono
Once lados	Endecágono
Doce lados	Dodecágono
Quince lados	Pentadecágono
Veinte lados	Icoságono.

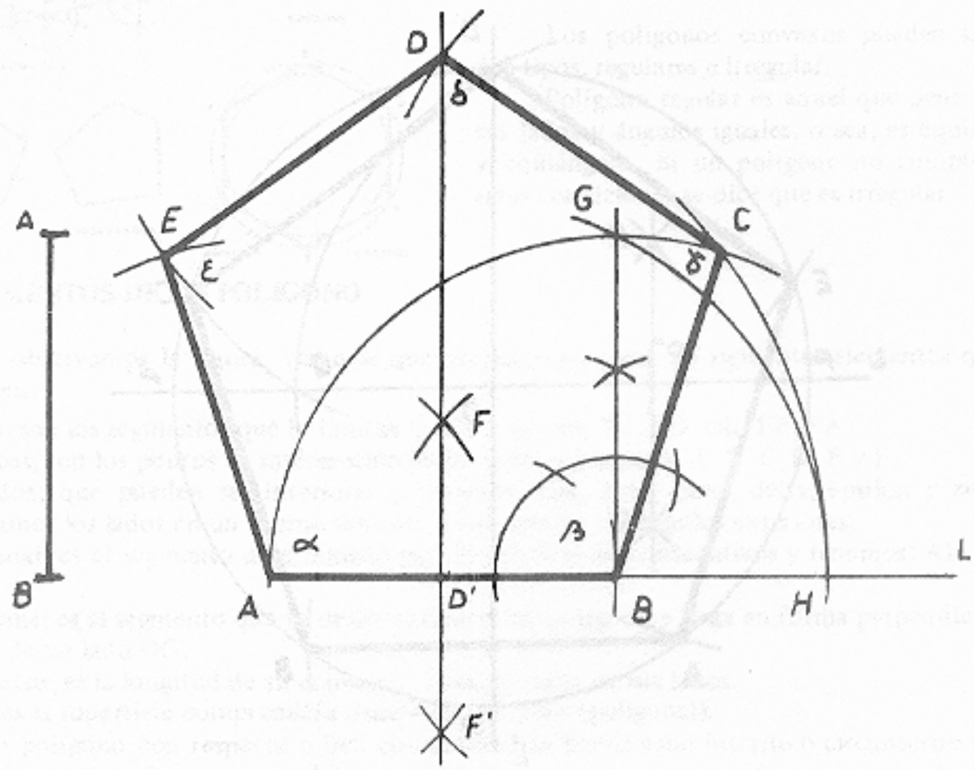
Los demás polígonos que no tienen nombres especiales, se les menciona por su número de lados solamente.



Dada una circunferencia de radio n, inscribir en ella un pentágono regular:

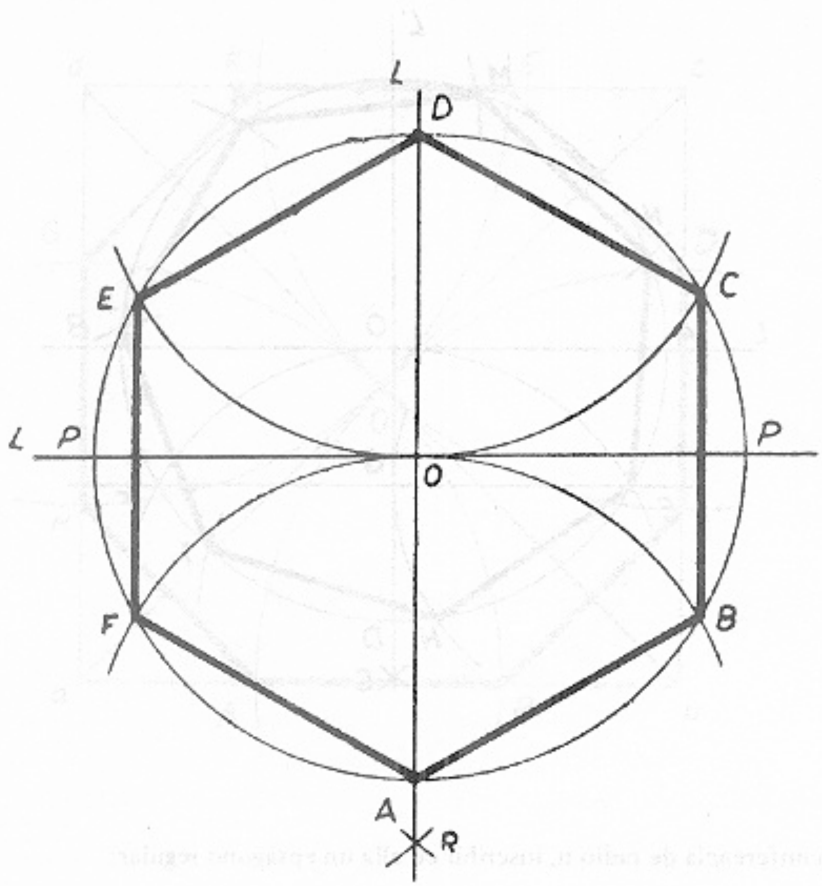
* Dibujar una recta L y otra L' que se corten en O, formando ángulos rectos.
* Con centro en O y radio n, se dibuja la cincunferencia que corte a L en P y P', y a la recta L' en los puntos D y D'.
* Dibujar la simetral al trazo OP, se obtiene el punto P"; con centro en este punto y magnitud P"D, dibujar un arco que corte la recta L en Q.
* Con centro en D y magnitud DQ, dibujar un arco que corte la circunferencia en el punto C.
* Con la misma magnitud DC y desde D se corta la circunsferencia en los puntos E, A y B; unidos entre sí con línea de solución se determina el pentágono regular pedido.

DIBUJAR UN POLIGONO



Dado un lado, dibujar un pentágono regular:

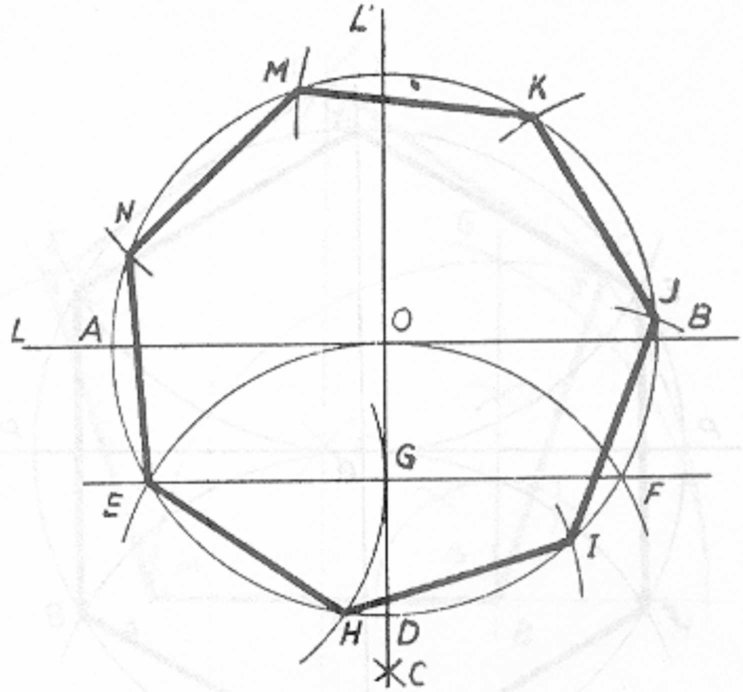
- * Dibujar un rayo A y sobre él copiar el trazo AB, levantando una simetral FF'.
- * Levantar una perpendicular en el extremo B.
- * Con magnitud AB y centro en B, dibujar un arco que corte la perpendicular en el punto G.
- * Con centro en D' y magnitud D'G dibujar un arco que corte el rayo A en el punto H.
- * Con magnitud AH y centro en A, dibujar un arco que corte la prolongación del arco que determinó G, ubicando el punto C.
- * Con magnitud BC y centro en C se corta la simetral en D.
- * Con igual magnitud y centro en D y A, determinamos el punto E.
- * Con línea de solución, se unen los puntos A, B, C, D, E y A, obteniéndose el pentágono regular pedido.



Dada una circunferencia de radio n, inscribir en ella un exágono regular:

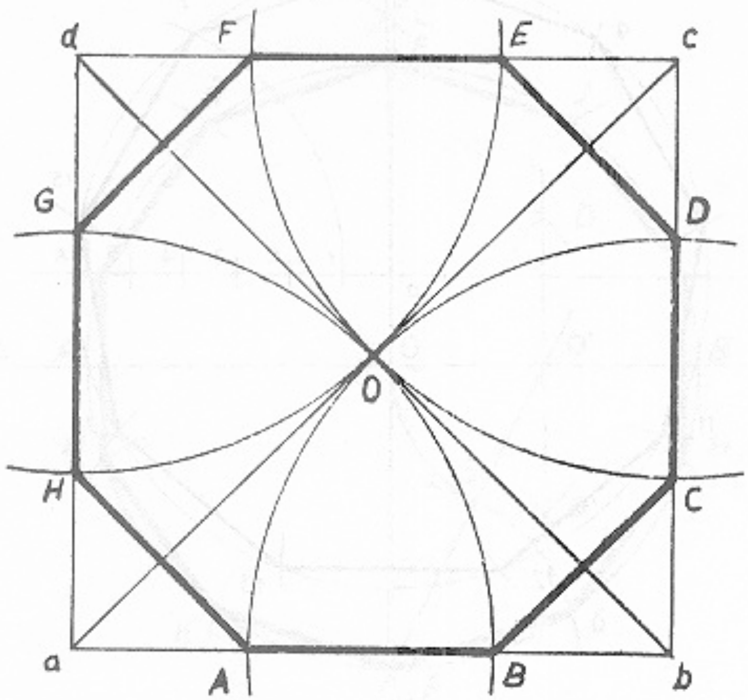
* Dibujar rectas L y L' que se corten en O formando ángulos rectos.
* Con centro en O y radio n, se dibuja la circunferencia que corta a L en P y P' y a L' en A y D.
* Con centro en A y magnitud AO, cortar la circunferencia en los puntos B y F.
* Con centro en D y magnitud AO, cortar la circunferencia en los puntos C y E.
* Con línea de solución se unen los puntos A, B, C, D, E, F y A, determinando el exágono regular inscrito.

DIBUJAR UN POLIGONO



Dada una circunferencia de radio n, inscribir en ella un eptágono regular:

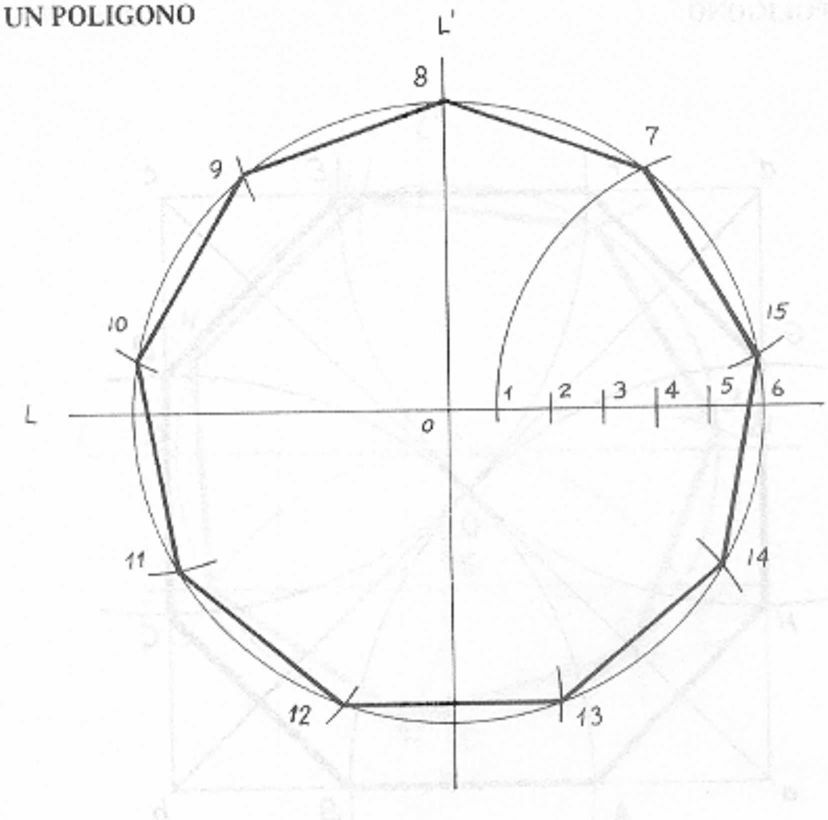
* Dibujar rectas L y L' que se corten en O formando ángulos rectos.
* Con centro en O y radio n se dibuja la circunferencia que corte a L' en D.
* Con centro en D y magnitud DO, se corta la circunferencia en los puntos E y F.
* Se une E con F cortando a la recta L' en el punto G
* Con magnitud EG se corta la circunferencia en siete partes iguales, determinando los puntos H, I, J, K, M y N. Al unirlos entre sí con línea de solución, se obtiene el eptágono regular inscrito.



Dado un cuadrado, inscribir en él un octágono regular:

* Dibujar el cuadrado a, b, c, d.
* Dibujar las diagonales ac y bd del cuadrado, determinando el punto O.
* Con centro en a, b, c y d, y magnitud aO, respectivamente, describir arcos que corten los lados del cuadrado. Se determinan los puntos B, G: A, D; C, F, y E, H.
* Con línea de solución se unen los puntos A, B, C, D, E, F, G, H y A, determinando la figura octogonal pedida.

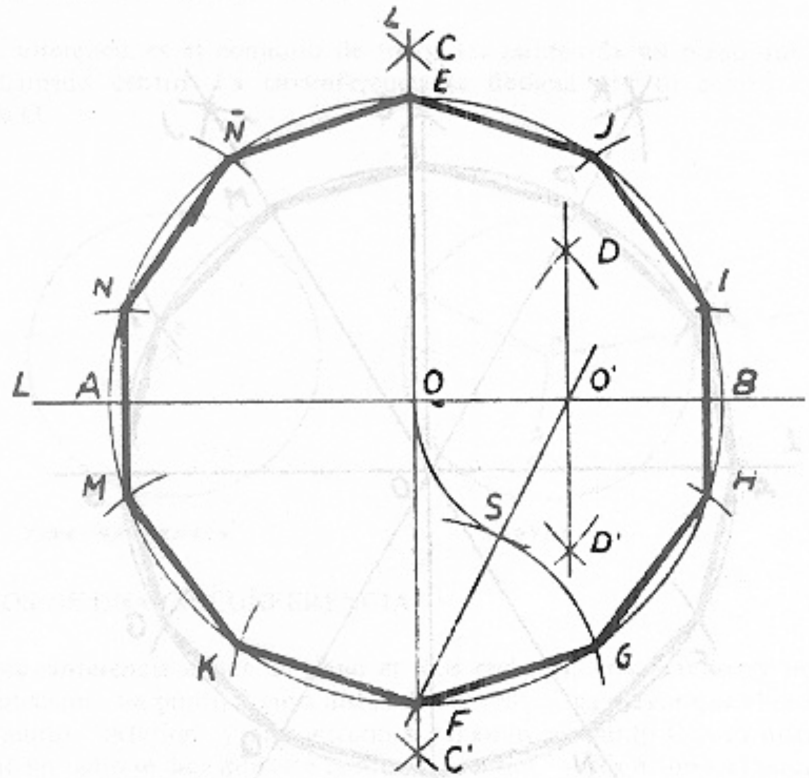
DIBUJAR UN POLIGONO



Dada una circunferencia de radio n, inscribir en ella un eneágono regular.

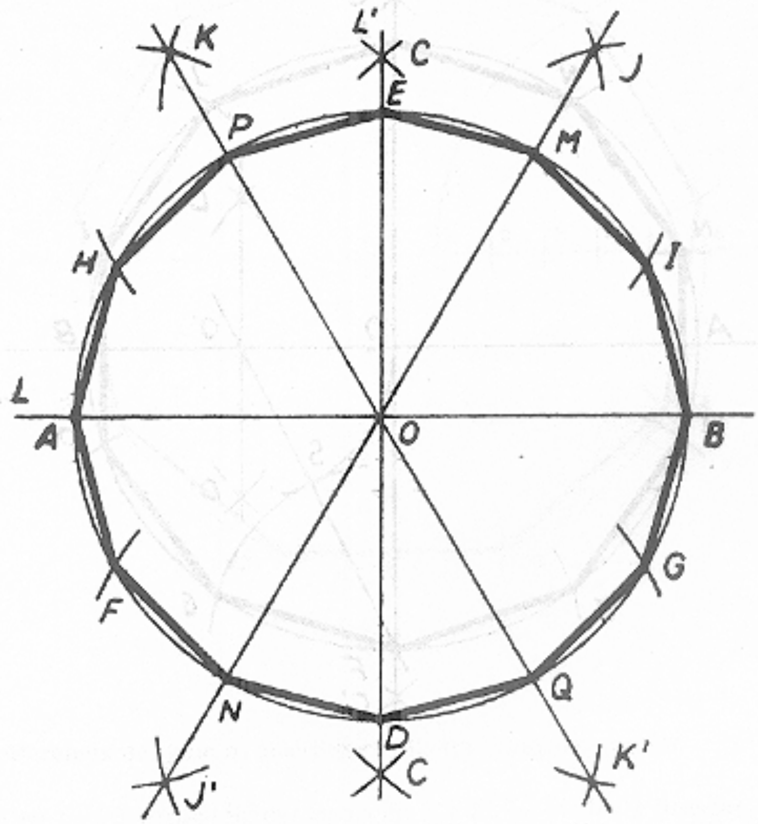
* Se trazan en forma perpendicular las rectas L y L', las cuales se intersectan en el punto O.
* Con centro en O y cierta magnitud se traza una circunferencia, la cual intersecta a las rectas anteriores en los puntos 6 y 8.
* El radio 0-6, se divide en seis segmentos iguales, obteniéndo los puntos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
* Con centro en 6 y magnitud 6-1, se traza un arco que intersecte a la circunferencia en el punto 7.
* A partir del punto 8 y con magnitud 7-8 y en forma sucesiva se trazan arcos en la circunferencia, obteniendo los puntos 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15.
* Con línea de solución se trazan los lados del polígono, quedando de esta forma dibujado el eneágono pedido.

DIBUJAR UN POLIGONO



Dada una circunferencia con radio n, inscribir un decágono regular:

* Dibujar rectas L y L' que se corten formando ángulos rectos, ubicando el punto O.
* Con centro en O y radio n, dibujar la circunferencia que corta a L en A y B y L' en E y F.
* Dimidiar el segmento OB con la simetral DD', determinando el punto O.
* Se unen los puntos F y O', con centro en O' y magnitud O'O, se corta la recta anterior en S.
* Con centro en F y magnitud FS se traza un arco que corte la circunferencia en el punto G.
* Con magnitud FG aplicándola sobre la circunferencia, se obtienen los puntos H, I, J, K, M, N y Ñ.
* Con línea de solución se unen los puntos entre sí, determinando la figura de diez lados pedida.



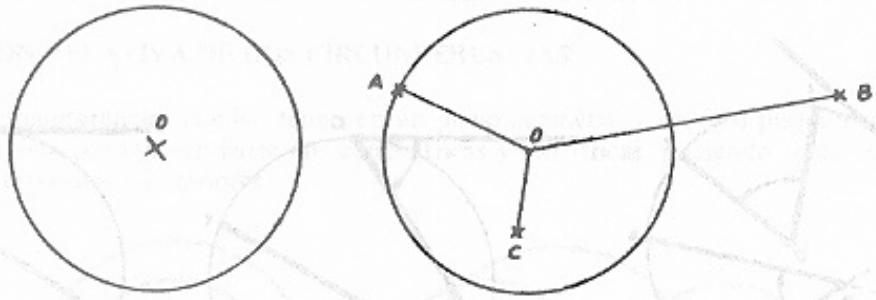
Dada una circunferencia con radio n, inscribir un dodecágono regular;

- Dibujar rectas L y L' que se corten en O formando ángulos rectos.
- Con centro en O y magnitud n, dibujar una circunferencia que corte a L en a Y B, y L' en D y E.
- Con radio n dividir la circunferencia en seis partes, determinando los puntos F y G, y H e I.
- Bisectar los arcos DG, DF, EH y EI con las rectas JJ' y KK', obteniendo los punto Q, N, P y M.
- Con línea de solución se unen los puntos entre sí, determinando la figura de doce lados pedida.

LA CIRCUNFERENCIA Y EL CIRCULO.

A. DEFINICION DE CIRCUNFERENCIA

Circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro interior llamado centro. La circunferencia se designa por su centro mediante una letra mayúscula O.



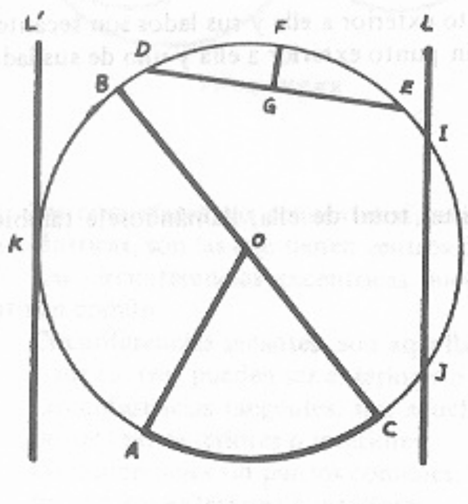
CIRCUNFERENCIA. PUNTOS.

B. PUNTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia divide al plano en dos regiones, una exterior y otra interior, por lo tanto, si ubicamos un punto B cuya distancia del centro sea mayor que el radio, se dice que este sería un punto "exterior" y al contrario si tenemos un punto C cuya distancia del centro es menor que un radio se dice que este punto es "interior" y por último, el punto A pertenecería a la circunferencia por estar en ella.

C. LINEAS DE UNA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia tiene varios elementos lineales, siendo estos los siguientes: radio, diámetro, cuerda, flecha, arco, secante y tangente.



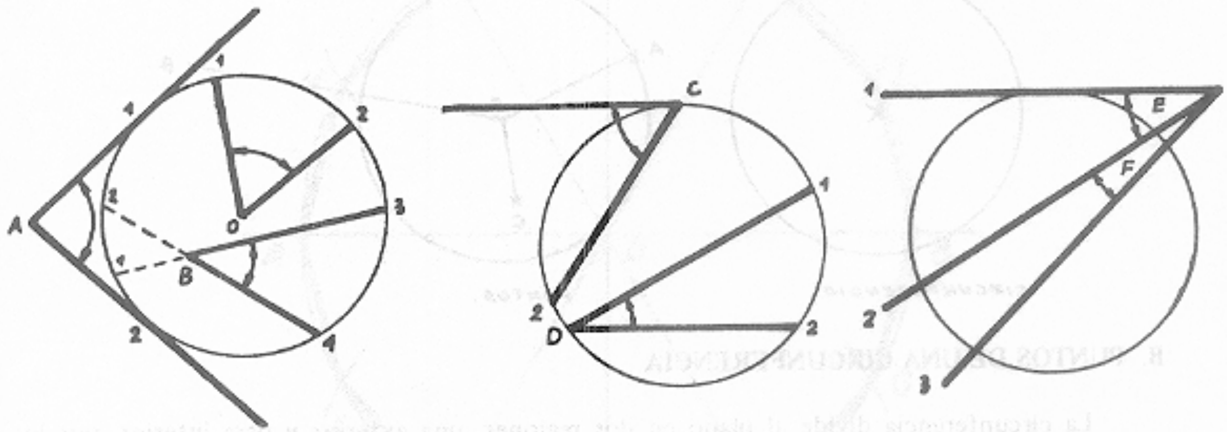
a. Radio (OA), es el segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.
b. Diámetro (BC), es el segmento determinado por dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro de ella dividiéndola en dos semicircunferencias.
c. Cuerda (DE), es el segmento determinado por dos puntos de la circunferencia que al pasar por el centro recibe él nombre de cuerda mayor.
d. Flecha (FG), es el segmento que une perpendicularmente el punto medio de una cuerda con su arco que ella determina.
e. Arco (AC), es una porción de la circunferencia.
f. Secante (L), es aquella recta que tiene dos puntos (IJ) comunes con la circunferencia.

g. Tangente (L'), es aquella recta que tiene un punto (K) común con la circunferencia.

Por último habría que decir que, si una recta no tiene ningún punto común con la circunferencia, ésta sería una "recta exterior".

D. ANGULOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

Tenemos los siguientes ángulos en función de una circunferencia, los cuales son: central, circunscrito, interior, inscrito, semi-inscrito, exterior y semi-exterior.



a. Central (1-O-2), es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios.

b. Circunscrito (1-A-2), es aquel que tiene sus lados tangentes a la circunferencia y su vértice exterior a ella.

c. Interior (3-B-4), es aquel cuyo vértice es un punto interior de la circunferencia y sus lados son segmentos de cuerdas.

d. Inscrito (1-D-2), es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas de ella.

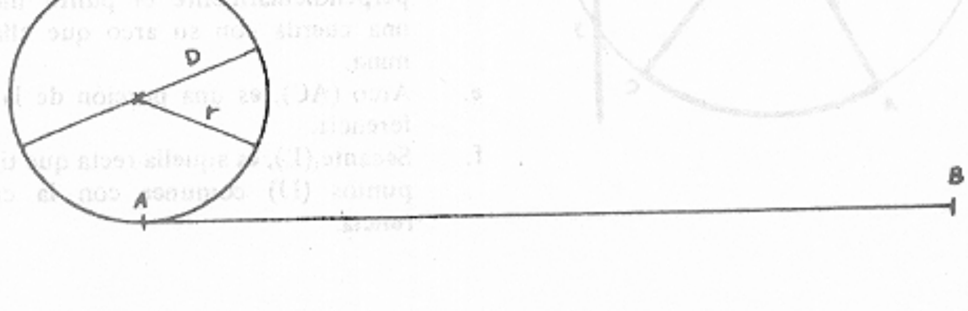
e. Semi-inscrito (1-C-2), es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es tangente y el otro es secante o cuerda.

f. Exterior (2-F-3), es aquel cuyo vértice es un punto exterior a ella y sus lados son secantes.

g. Semiexterior (1-E-2), es aquel cuyo vértice es un punto exterior a ella y uno de sus lados es tangente y el otro secante.

E. PERIMETRO DE UNA CIRCUNFERENCIA

El perímetro de una circunferencia es la longitud total de ella, llamándosele también desarrollo.



Para calcular el perímetro o desarrollo de una circunferencia, debe hacerse por intermedio de las siguientes fórmulas:

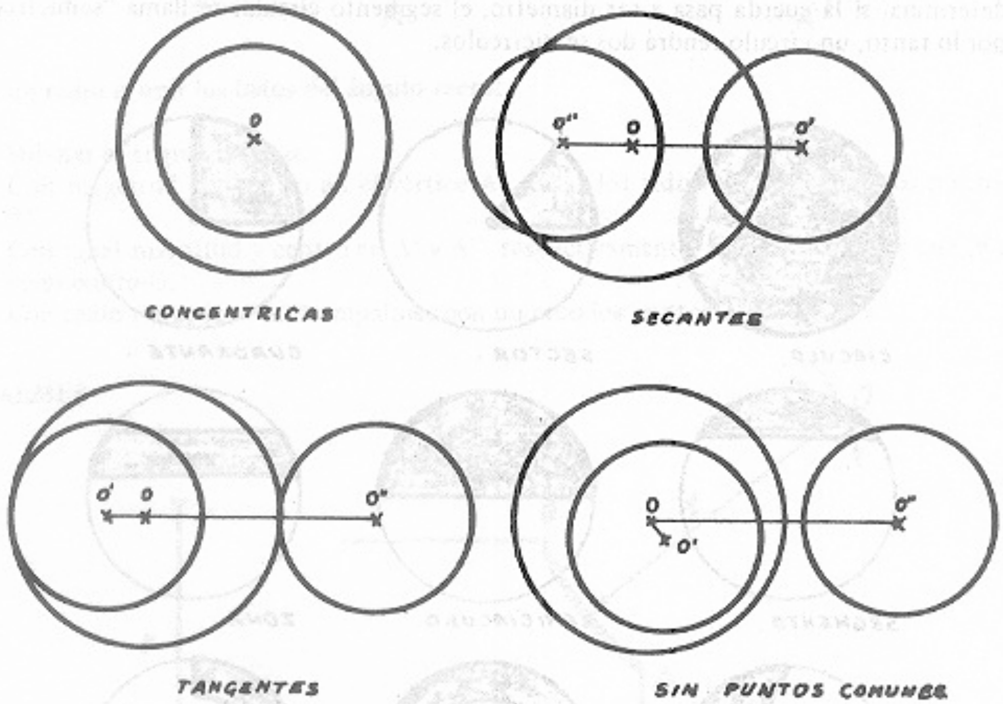
Perímetro = Diámetro multiplicado por Pi. (AB = D x Pi) o bien

Perímetro = 2 veces Pi multiplicado por el radio. (AB = 2 Pi x r)

Siendo Pi una constante matemática, que equivale a las veces que cabe un diámetro en esa línea curva cerrada llamada circunferencia. Tiene esta constante, un valor aproximado de 3 veces y un poco más, ese poco más, esta representado por 28 decimales de los cuales tenemo: Pi = 3,141592653589793238462643 etc. no habiéndose encontrado todavía un valor exacto para Pi, por lo cual nosotros nos conformaremos con darle un valor de 3,1416 o bien 3,14.

F. POSICION RELATIVA DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Dos circunferencias pueden tener, en un plano geométrico, diversas posiciones relativas y se dice que ésta pueden agruparse en: concéntricas y exéntricas, pudiendo tener éstas últimas sus centros interiores o exteriores.



Las circunferencias concéntricas, son aquellas que tienen un centro común para ambas y las excéntricas, son las que tienen centros distintos.

Las circunferencias excéntricas pueden ser: secantes, tangentes o bien no tener ningún punto en común.

a. Circunferencias secantes, son aquellas que se intersectan en dos puntos comunes a ambas y sus centros pueden ser exteriores o interiores.

b. Circunferencias tangentes, son aquellas que se intersectan en un solo punto, pudiendo sus centros ser exteriores o interiores.

c. Circunferencias sin puntos comunes, son aquellas que no son secantes ni tangentes, siendo sus centros exteriores o interiores.

El segmento que une los centros de dos circunferencias, se llama "central" o "línea de los centros".

G. DEFINICION DE CIRCULO

Círculo es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de los interiores a la misma.

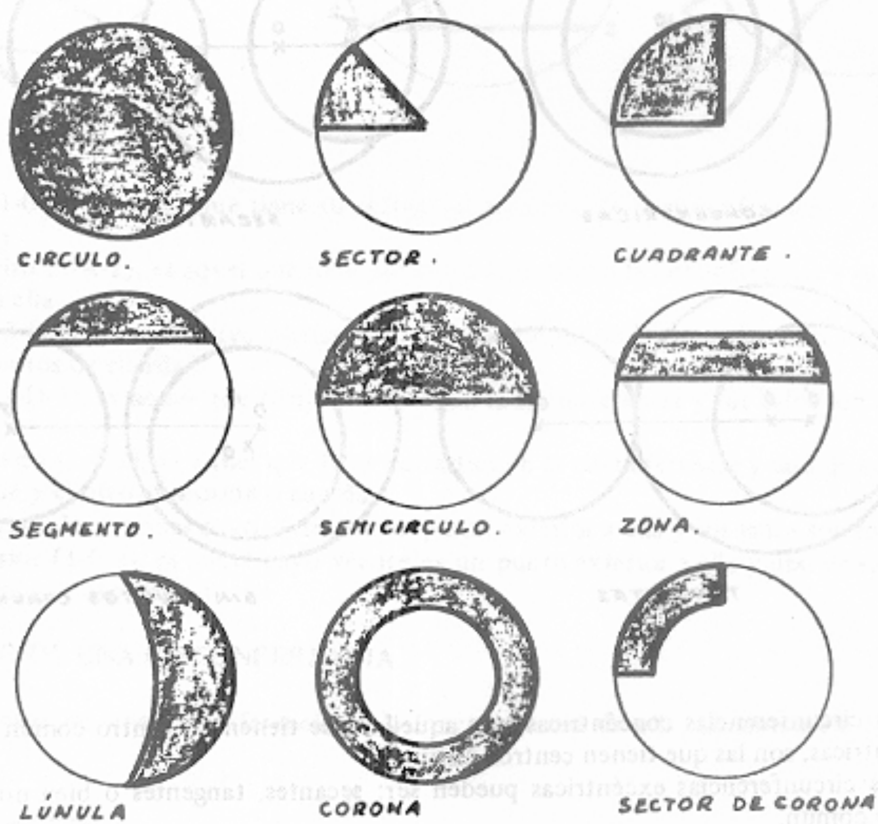
El círculo es el área de la circunferencia, por lo tanto, se puede decir de que es la superficie comprendida dentro de una circunferencia.

H. PARTES DE UN CIRCULO

Si dividimos el círculo en partes, tendremos figuras que tienen sus nombres propios, las cuales serían: sector circular, segmento circular, zona circular, lúnula y corona circular, teniendo algunos de ellos derivaciones.

a. Sector circular, es la parte del círculo limitada entre dos radios y su cuerda correspondiente, si los radios se abren a una magnitud de 90 grados, el sector circular pasa a llamarse "cuadrante", por lo tanto, un círculo tendría cuatro cuadrantes.

b. Segmento circular, es la parte del círculo limitada entre una cuerda y el arco que ella determina, si la cuerda pasa a ser diámetro, el segmento circular se llama "semicírculo", por lo tanto, un círculo tendrá dos semicírculos.

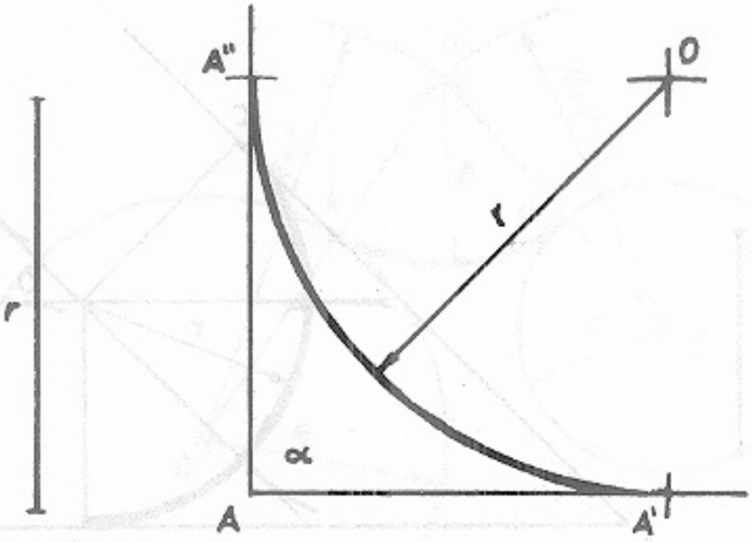


c. Zona circular, es la parte del círculo limitada entre dos cuerdas paralelas o bien una cuerda y un diámetro.

d. Lúnula, es la parte del círculo limitada entre dos arcos exéntricos.

e. Corona circular, es la parte del círculo limitada entre dos circunferencias concéntricas, también se le conoce por los nombres de "anillo" o "ánulo circular". Si consideramos solamente una porción de una corona, a ésta se le llama "trapecio circular" o "sector circular" que sería la parte del círculo comprendida entre dos arcos concéntricos y sus segmentos de radios que ellos determinan.

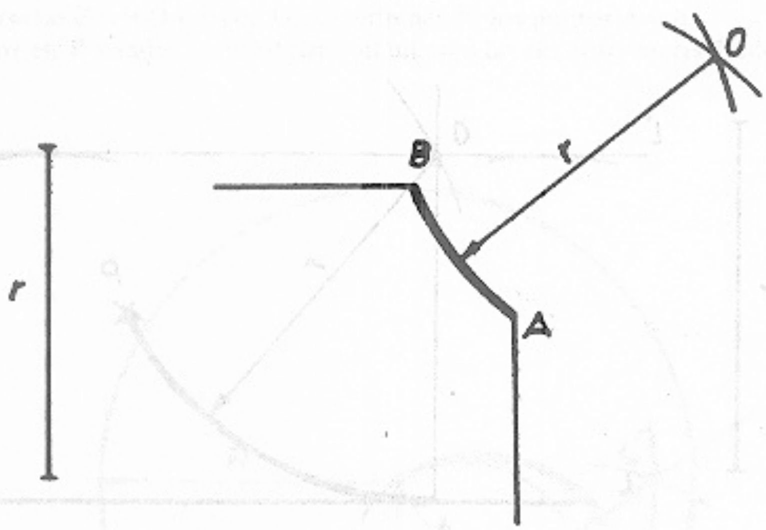
EMPALMES



Dado un radio r, unir los lados del ángulo recto:

* Dibujar el ángulo recto α.
* Con magnitud r y centro en el vértice A, cortar los lados del ángulo en los puntos A' y A''.
* Con igual magnitud y centro en A' y A'', respectivamente, dibujar dos arcos que se corten en el punto O.
* Con radio r y centro en O empalmar con un arco los puntos A' y A''.

EMPALMES

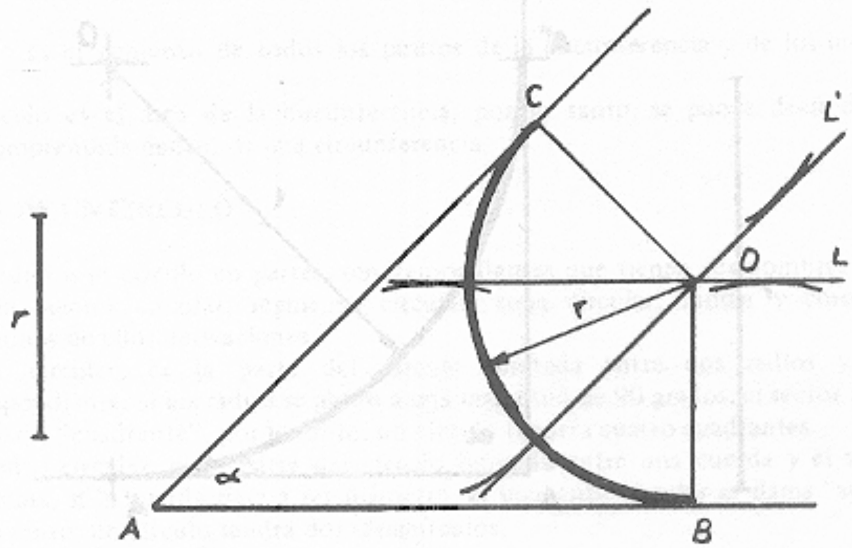


Dado un radio r, unir dos puntos cualesquiera:

* Ubicar los puntos A y B.
* Con magnitud de radio r y centro en A y B, respectivamente, dibujar dos arcos que se corten en el punto O.
* Con centro en O y magnitud r, empalmar con un arco los puntos A y B.

Nota.– Los puntos se toman como rectas para indicar en mejor forma el empalme.

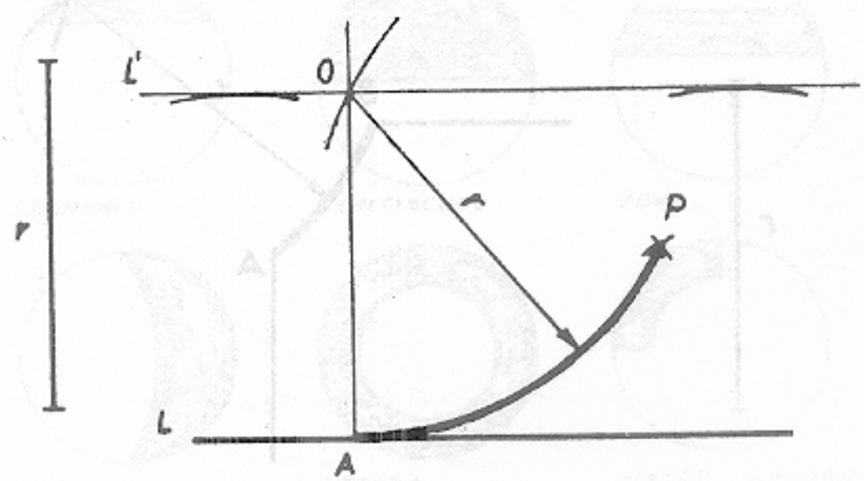
EMPALMES



Dado un radio r, unir los lados de un ángulo agudo cualquiera:

- Dibujar un ángulo agudo α.
- Dibujar las rectas L y L' paralelas a los lados del ángulo α, con magnitud r, cortándose en el punto O .
- Desde O dibujar perpendiculares a los lados del ángulo, determinando los punto B y C.
- Con centro en O y magnitud de radio r, empalmar con un arco los puntos B y C.

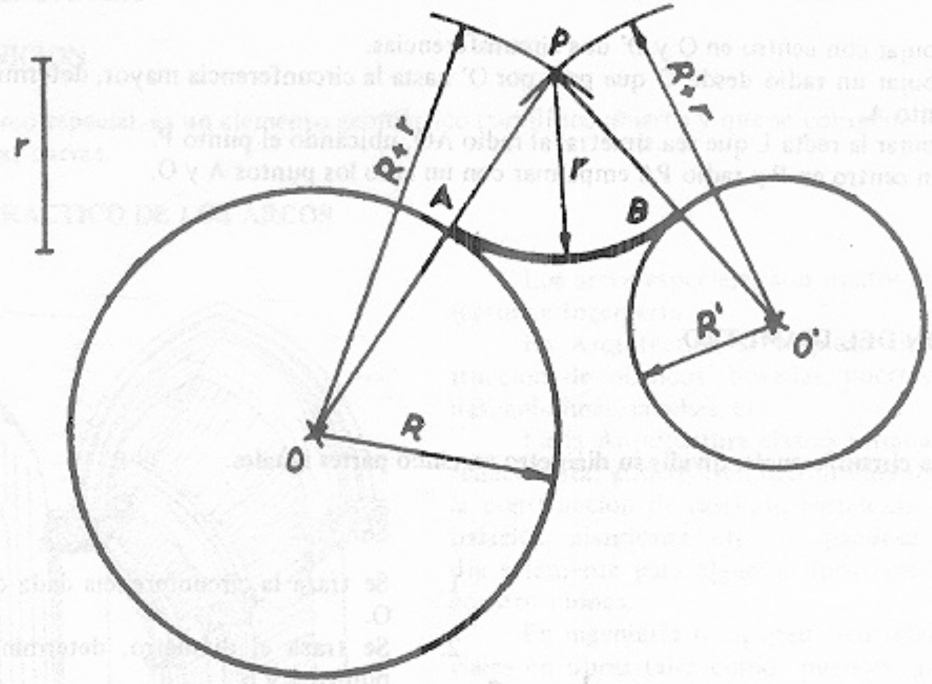
EMPALMES



Dado un radio r, unir un punto a una recta:

- Dibujar la recta L' paralela a L.
- Con centro en el punto P y magnitud r, cortar con un arco la recta L', ubicando el punto O.
- Desde O bajar la perpendicular a la recta L, determinando el punto A.
- Con magnitud de radio dada y centro en O, empalmar el punto P con la recta dada hasta el punto A.

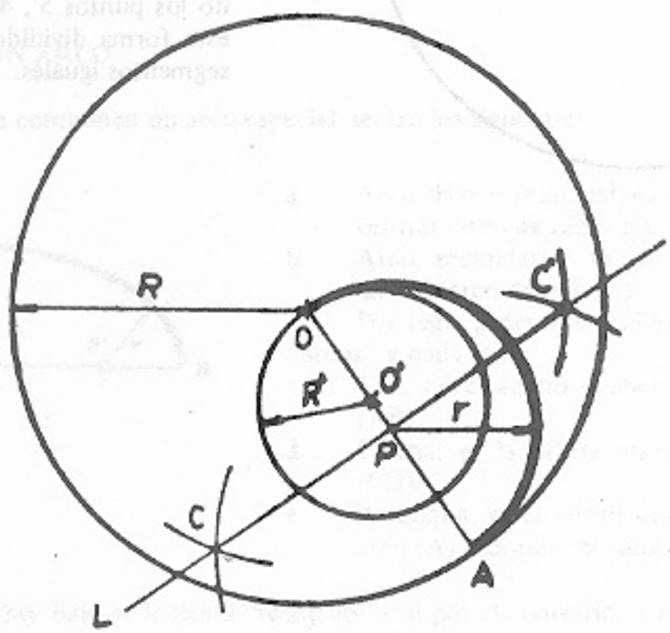
EMPALMES



Enlazar dos circunferencias excéntricas exteriores cualesquiera:

* Dibujar dos circunferencias de radios R y R'.
* Con centro en O y magnitud de radio R + r, dibujar un arco.
* Con centro en O y magnitud de radio R' + r, cortar el arco anterior, ubicando el punto P.
* Unir con rectas P con O y P con O', determinando los puntos A y B.
* Con centro en P y radio r, empalmar con un arco las circunferencias desde los puntos A y B.

EMPALMES

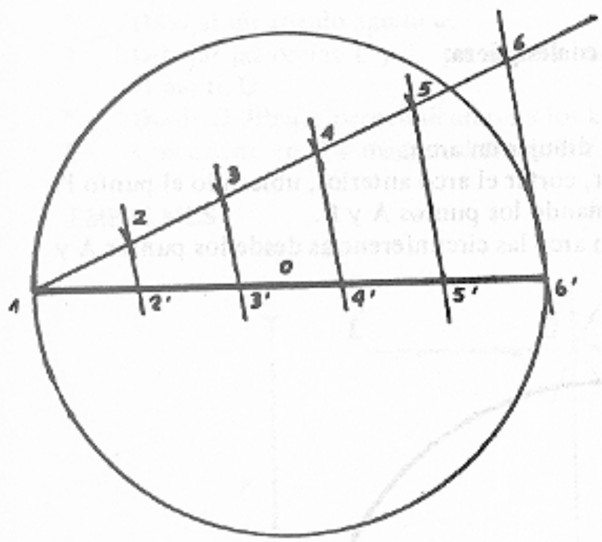


Enlazar dos circunferencias excéntricas interiores por medio de un arco:

* Dibujar con centro en O y O' dos circunsferencias.
* Dibujar un radio desde O que pase por O' hasta la circunferencia mayor, determinando el punto A.
* Dibujar la recta L que sea simetral al radio AO, ubicando el punto P.
* Con centro en P y radio PA empalmar con un arco los puntos A y O.

DIVISION DEL DIAMETRO

Dada una circunferencia, dividir su diámetro en cinco partes iguales.



1. Se traza la circunferencia dada de centro O.
2. Se traza el diámetro, determinando los puntos 1 y 6'.
3. A partir del punto 1, se traza una semirrecta a cualquier ángulo con respecto al diámetro.
4. Con cualquiera magnitud y a partir del punto 1 en forma sucesiva, se trazan arcos determinando los puntos 2, 3, 4, 5 y 6.
5. Se traza una recta que pase por los puntos 6 y 6'.
6. Desde los puntos 5, 4, 3 y 2, se trazan rectas paralelas a la primera, determinando los puntos 5', 4', 3' y 2', quedando de esta forma dividido el diámetro en cinco segmentos iguales.

ARCOS ESPECIALES

A. DEFINICION

El arco especial, es un elemento geométrico curvilíneo abierto y que se compone de una o varias líneas curvas.

B. USO PRACTICO DE LOS ARCOS

Los arcos especiales son usados en Arquitectura e Ingeniería.

En Arquitectura se emplean en la construcción de pórticos, bóvedas, puertas, ventanas, columnas, cerchas, etc.

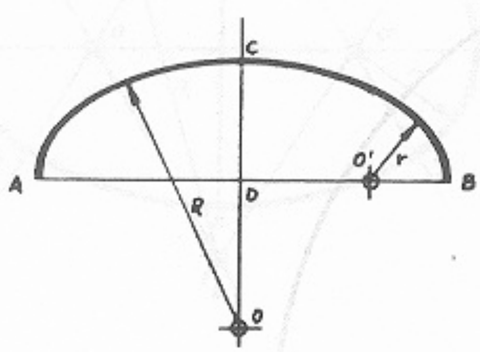
En la Arquitectura clásica antigua de tipo renacentista, gótico, etc., fueron muy usados en la construcción de castillos, fortalezas, iglesias, palacios, mansiones, etc., ocupándose hoy en día solamente para algunos tipos especiales de construcciones.

En ingeniería se ocupan estos arcos especiales en obras tales como: puentes, galpones, elementos estructurales, refuerzos de maquinarias, túneles, etc.

Existe una gran variedad de estos arcos especiales, de los cuales veremos los más importantes en cuanto a su empleo.

C. ELEMENTOS DE UN ARCO

Los elementos que componen un arco especial, serían los siguientes:



a. Arco clave o principal; es el arco mayor, o central (arco de radio R).

b. Arco secundario, es el arco menor o lateral (arco de radio r).

Por regla general se les llama simplemente "arcos" y nada más.

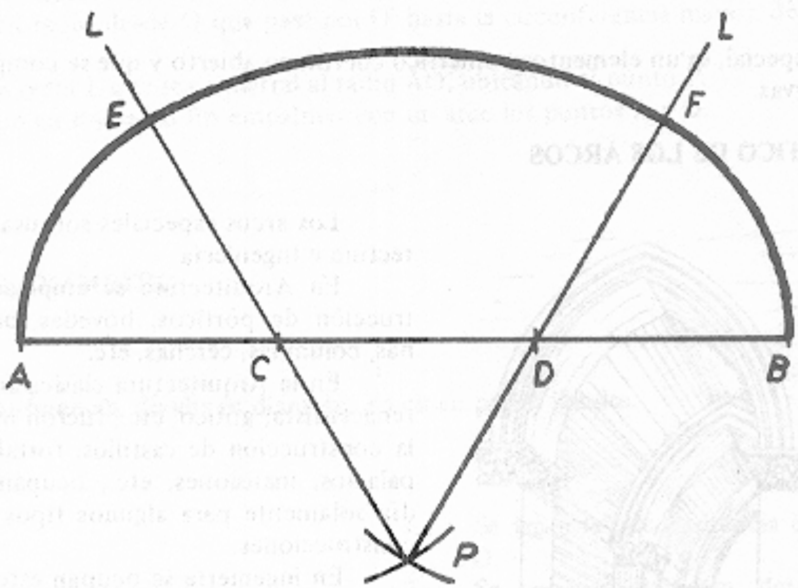
c. Luz, es el ancho o abertura de un arco (AB).

d. Flecha, es la altura máxima de un arco (CD).

e. Arranque, es el punto donde empieza un arco (A) o donde termina (B).

Cuando un arco es muy bajo se le llama "rebajado" y si por el contrario es muy alto se le llama "peraltado".

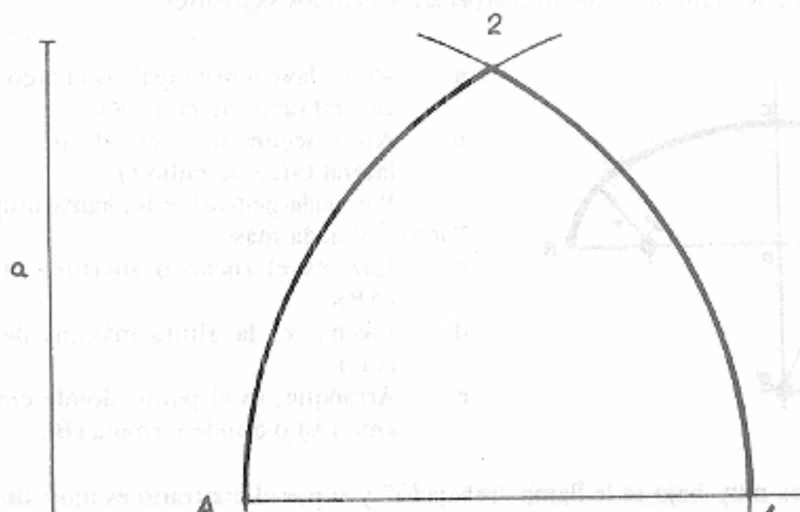
DIBUJAR UN ARCO CARPANEL



Dada la luz AB, trazar un arco zarpanel o carpanel:

* Dibujar el trazo AB y dividirlo en tres partes iguales, determinando los puntos C y D.
* Con centro en C y D, respectivamente, y magnitud CD, dibujar dos arcos que se corten, ubicando el punto P.
* Con rectas L y L', unir los puntos P'C y P'D.
* Con centro en C y D, respectivamente, y magnitud CA, dibujar arcos hasta L y L', ubicando los puntos E y F.
* Con centro en P y magnitud PE, empalmar con un arco los puntos E y F, determinando el arco pedido.

DIBUJAR UN ARCO OJIVAL



Dada la luz a, dibujar un arco ojival o gótico.

* Se traza una semirrecta A.
* Con centro en A y magnitud a, se copia la luz dada sobre la semirrecta.
* Con centro en A y 1 alternadamente y magnitud a, se trazan dos arcos con línea de solución que se intersecten en el punto 2, quedando de esta forma dibujado el arco ojival pedido.

FIGURAS CURVILINEAS

A. DEFINICION

Las figuras curvilíneas son aquellas que estan limitadas por líneas curvas sobre un plano geométrico (plana) y empalmadas entre sí (cerrada), de forma alargada (oblonga) y sus arcos se repiten a ambos lados de la figura (simétrica). En resumen: son aquellas figuras compuesta por una línea curva plana, cerrada, oblonga y simétrica.

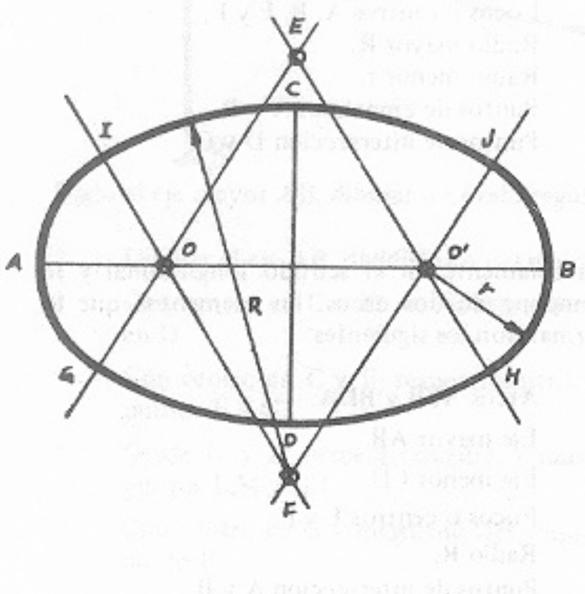
Estas figuras son derivadas de la circunferencia o del principio de equidistancia de sus centros y se pueden construir a compás y regla.

B. TIPOS DE FIGURAS CURVILINEAS

Tenemos varios tipos de figuras curvilíneas, las cuales son: el óvalo, el ovoide, la cordiforme, el huso y la lúnula, las cuales se analizarán detalladamente.

C. OVALO

El óvalo es la figura curvilínea simétrica en el sentido longitudinal y transversal a la vez y se compone de cuatro arcos iguales de dos en dos, sus elementos que lo forman serían los siguientes:



a. Arcos mayores GH y JI.
b. Arcos menores IG y JH.
c. Eje mayor AB.
d. Eje menor CD.
e. Focos o centros O, O', E y F.
f. Radio mayor R.
g. Radio menor r.
h. Puntos de empalme G, H, I y J.

Cabe hacer notar, de que a pesar de ser muy parecido a una elipse no es lo mismo (ver elipse).

LAS CONICAS

A. BREVE RESEÑA HISTORICA

Las cónicas fueron descubiertas por el griego Apolonio de Pérgamo (360-300 años A.C.), el cual estudió todas sus propiedades que sirvieron de base a estudiosos comoKépler y Blas Pascal.

Blas Pascal (1623-1662), matemático francés que a los dieciséis años escribió una obra que le llamó "Ensayo sobre las cónicas", cuyos estudios difieren fundamentalmente en la forma de concebir las cónicas con respecto de su descubridor, dejando admirado a Descartes. A él se debe además el triángulo aritmético y el cálculo de probabilidades fuera de otras cosas e inventos, considerándosele además como el iniciador de la Geometría Moderna.

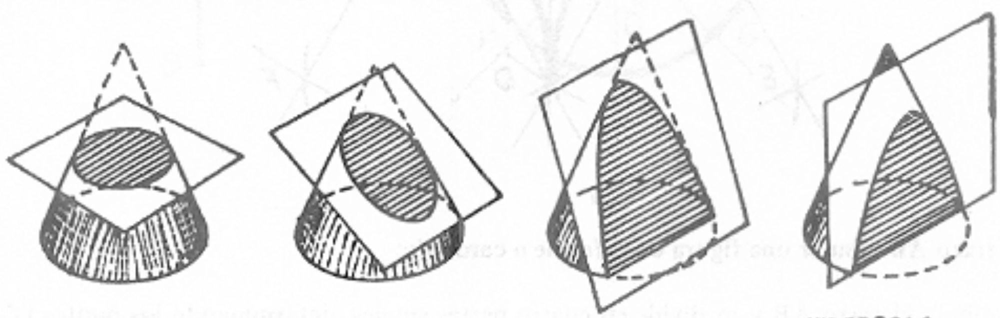
B. DEFINICION DE LAS CONICAS

Las cónicas son curvas planas abiertas o cerradas, que son generadas por la intersección de un plano con un cono, siendo por esto llamadas cónicas.

Estas curvas son de gran importancia no sólo en matemáticas sino que también en la práctica y pueden presentarse tres casos que se detallaran a continuación.

C. TIPOS DE CONICAS

Tenemos los siguientes tipos de cónicas:



a. La elipse, que es una curva plana, cerrada y simétrica que es generada por la intersección de un plano oblicuo al eje generatriz del cono, dicha intersección compromete solamente al manto del cono por eso es cerrada.
   La elipse aunque muy parecida al óvalo no es igual matemáticamente hablando, ya que el óvalo, es una figura curvilínea que está formada por arcos de circunferencia como lo hemos visto en el capítulo anterior, por lo tanto puede construirse a compás, en cambio la elipse es producto de un conjunto de puntos que forman una curva de intersección en el manto cónico y estos no pueden empalmarse a compás, sino por intermedio de una plantilla de curvas.

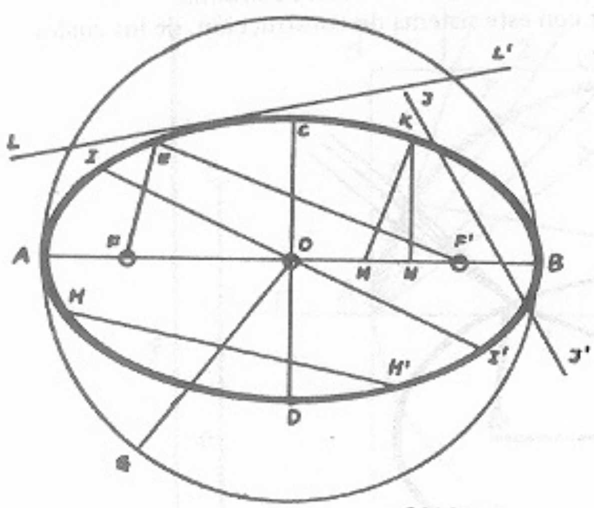
b. La parábola, es una curva plana, abierta y simétrica que es generada por la intersección de un plano paralelo a la generatriz del manto del cono y como la intersección compromete también a la base, la línea curva queda interrumpida o sea abierta.

c. La hipérbola, es una curva plana abierta y simétrica que es generada por la intersección de un plano paralelo al eje generatriz del cono.

A pesar de que el círculo es también producto de la intersección de un plano con un cono, no se le considera dentro de las cónicas.

D. ELEMENTOS DE LAS CONICAS

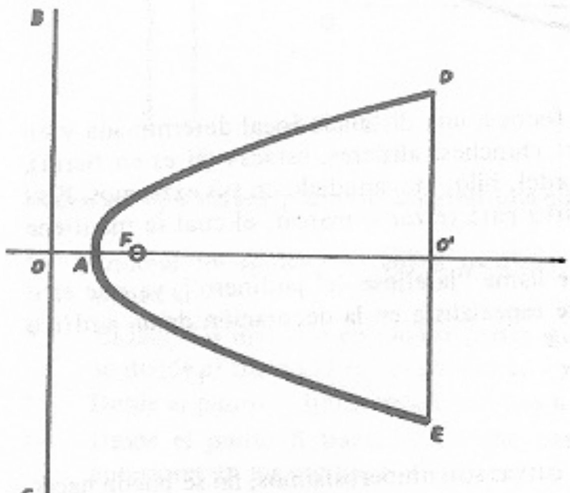
Las cónicas tienen varios elementos lineales, que es conveniente conocer y estudiar, los cuales en cada una de las cónicas serían:



ELIPSE

a. Elementos de la elipse.

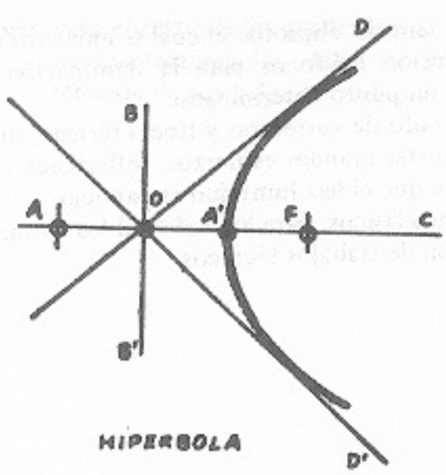
Eje mayor A-B. Semiejes A-O y O-B.
Eje menor C-D. Semiejes C-O y O-D.
Focos F y F'. Cuerda H-H'.
Distancia focal F-F'.
Diámetro conjugado I-I'.
Vértices A, B, C y D.
Centro O.
Radio vector mayor F'-E.
Radio vector menor F-E.
Normal K-N.
Subnormal K-M.
Tangente o asíntota L-L'.
Secante J-J'.
Radio de la circunferencia exterio O-G.



PARABOLA

b. Elementos de la parábola.

Recta directriz B-C.
Centro O.
Vértice A.
Foco F.
Eje A-O'.
Cuerda D-E.
Distancia focal O-F.



HIPERBOLA

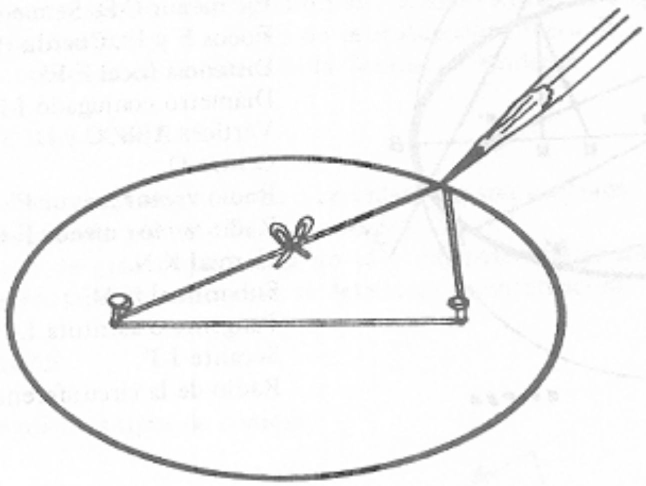
c. Elementos de la hipérbola.

Eje longitudinal A-C.
Eje transversal B-B'.
Centro O.
Vértices A y A'.
Foco F.
Asíntotas O-D Y O-D'.
Distancia entre vértices A-A'.

E. CONSTRUCCION SIMPLIFICADA

Las construcciones simplificadas o prácticas de las cónicas, son de escasa precisión pero de gran simplicidad y tienen la ventaja de dibujar una curva cónica de manera continua.

Los tres tipos de cónicas pueden dibujarse con este sistema de construcción, de los cuales veremos solamente uno, la elipse.



Para trazar una elipse, se deben ubicar los focos a una distancia focal determinada y en ellos clavar dos elementos de sujeción como ser: chinches, alfileres, estacas (si es en tierra), tachuelas, etc., para luego pasar entre ellos un cordel, hilo, etc. anudado en sus extremos. Para el trazado se usa un lápiz u otro elemento que sirva para trazar o marcar, el cual se mantiene tenso a medida que se esta dibujando.

Esta elipse construida con este sistema se le llama "la elipse del jardinero", ya que esto permite trazar una elipse de gran dimensión a este especialista en la decoración de un jardín o prado.

F. USO PRACTICO DE LAS CONICAS

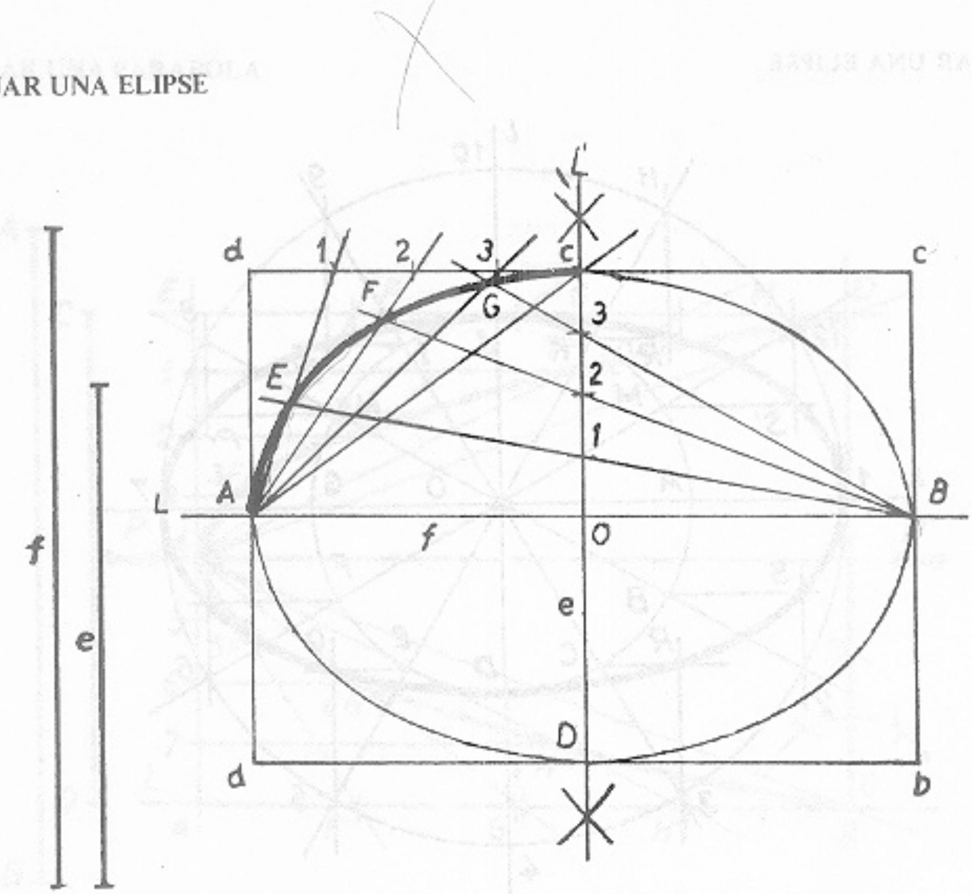
Los usos que se le puede dar a este tipo de curvas son numerosísimos, no se puede hacer una reseña completa de sus aplicaciones, pero no obstante, se citarán los más sencillos o de uso más frecuente.

La elipse al rotarla genera el cuerpo de revolución llamado elipsoide el cual se encuentra en numerosas aplicaciones en la construcción, construcción de focos para la iluminación, reflectores o faroles donde se necesita concentrar la luz en un punto determinado.

La parábola tiene también gran aplicación en el trazado de carreteras y líneas férreas, en la construcción de piezas mecánicas que tengan que soportar grandes esfuerzos, reflectores y focos donde se desee una iluminación en un cierto radio, ya que el haz lumínico es paralelo.

La hipérbola es usada para la graficación de fenómenos físicos, para lo cual se ubica en un plano cartesiano y tiene un empleo frecuente en la ejecución de trabajos técnicos.

DIBUJAR UNA ELIPSE



Dados sus ejes mayor y menor, inscribir una elipse a un rectángulo:

* Dibujar un rectángulo cuyas medianas sean iguales a los ejes dados, determinando el punto O.
* El lado Cd dividirlo en cuatro partes iguales, ubicando los puntos 1, 2 y 3; de igual modo se divide el trazo CO en los puntos 1, 2 y 3.
* Desde el punto A trazar rectas que pasen por los puntos 1, 2, 3 y C.
* Desde el punto B trazar rectas que pasen por los puntos 1, 2 y 3 cortando las rectas anteriores en los puntos E, F y G.
* Con línea de solución se unen los puntos A, E, F, G y C con arcos a mano alzada.

Nota: Para el resto de los cuadrantes se procede de igual manera. Para la obtención de una elipse matemática regular, debe ser ésta inscrita en un rectángulo áureo, vale decir, que la relación de sus lados es de 2 es a 3.

PROYECCION DE UN PLANO

A. DEFINICION

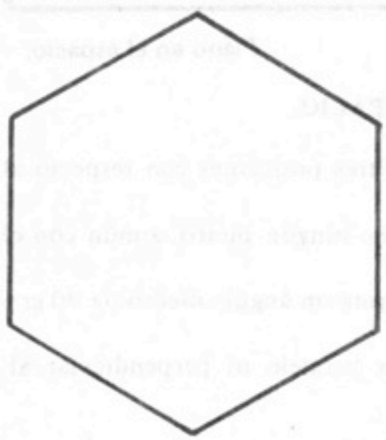
Se entiende por "plano" en Geometría Descriptiva la figura geométrica poligonal, la cual estaría limitada por la unión de trazos (lados) que se intersectan en sus extremos (vértices), formando puntos. La superficie comprendida dentro de los lados de un polígono se llama región poligonal.

B. TIPOS DE POLIGONOS

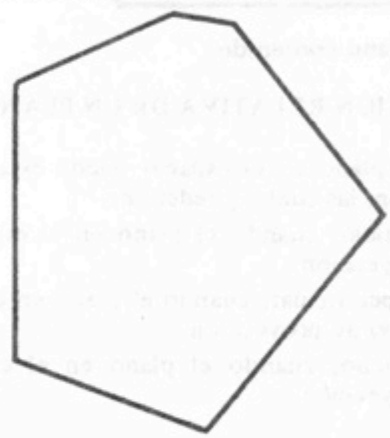
Un polígono o plano puede ser regular o irregular, dependiendo esto de sus lados y ángulos interiores.

Polígono regular es aquel que tiene todos sus lados de igual longitud y sus ángulos interiores también iguales.

Polígono irregular es aquel que no tiene ni sus ángulos ni lados iguales.



Polígono regular.



Polígono irregular.

C. NOMBRES QUE TOMAN LOS POLIGONOS

Los polígonos se nombran por su número de lados, habiendo algunos que tienen nombres particulares y así tenemos que:

5 lados = Pentágono
3 lados = Triángulo.
4 lados = Cuadrilátero.
6 lados = Pentágono.
7 lados = Exágono.
8 lados = Octágono.
9 lados = Eneágono.
10 lados = Decágono.
11 lados = Endecágono.
12 lados = Dodecágono.
15 lados = Pentadecágono.   20 lados = Icoságono

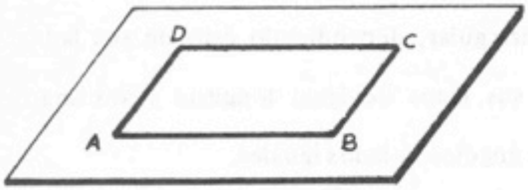
20 lados

D. DESIGNACION

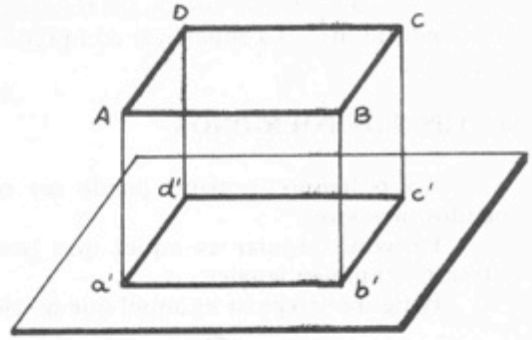
En Geometría Descriptiva se denomina por plano ABC al triángulo ABC, y sus vértices se designan mediante letras mayúsculas y sus trazos o proyecciones por letras minúsculas correlativas, como también puede designarse un plano por intermedio de números.

E. UBICACION DE UN PLANO

Un plano puede estar contenido o en el espacio, se dice que un plano está contenido cuando todos los elementos que lo componen son comunes al plano de proyección y estará en el espacio cuando sus elementos que lo componen están contenidos en un plano distinto al plano de proyección.



Plano contenido.



Plano en el espacio.

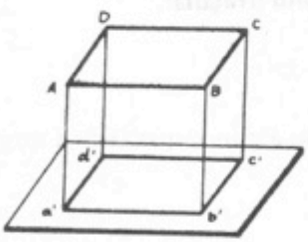
F. POSICION RELATIVA DE UN PLANO EN EL ESPACIO.

Un plano en el espacio puede estar situado en tres posiciones con respecto al plano de proyección, las cuales pueden ser:

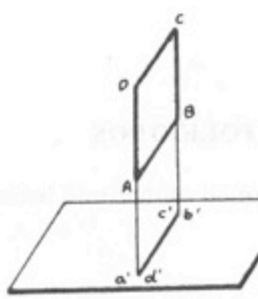
a. Paralelo, cuando el plano en el espacio no tiene ningún punto común con el plano de proyección.

b. Perpendicular, cuando el plano en el espacio forma un ángulo diedro de 90 grados con el plano de proyección.

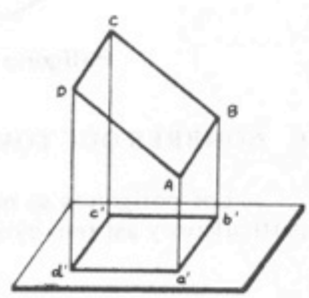
c. Oblicuo, cuando el plano en el espacio no es paralelo ni perpendicular al plano de proyección.



Parapelo..

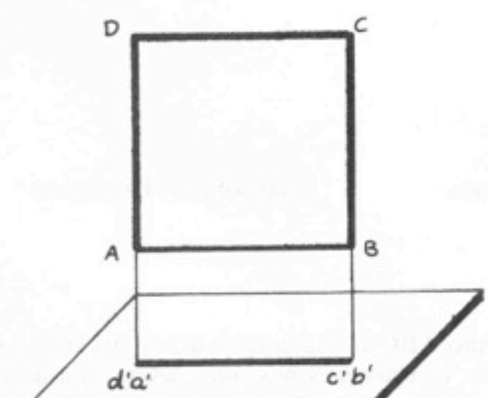


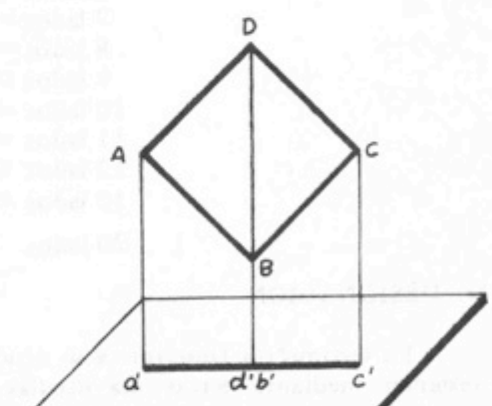
Perpendicular.



Oblicuo.

Cabe señalar que cuando un plano está perpendicular al plano de proyección, puede o no tener uno de sus lados paralelo a éste.





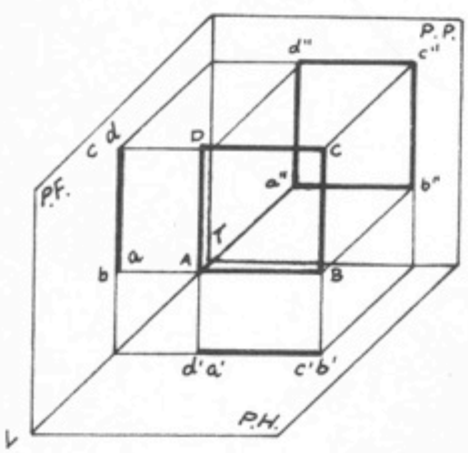
G. PROYECCION DE FILO

Al proyectar un plano perpendicular al de proyección, éste quedará en una proyección de filo, vale decir, que el plano quedará representado por una línea recta en el plano de proyección.

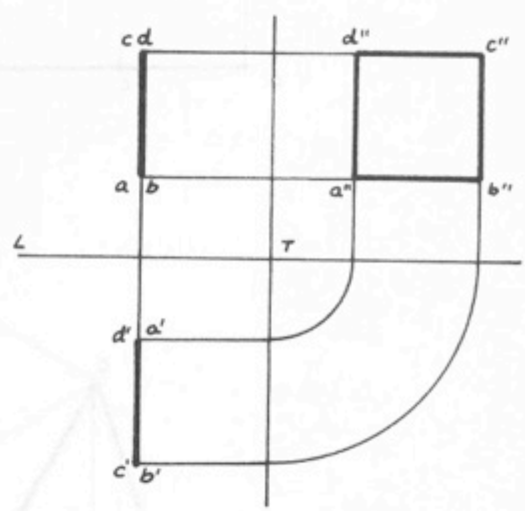
La proyección de filo se hace indispensable cuando se desea obtener la verdadera forma del plano (magnitudes reales).

Si observamos la figura precedente, notaremos que el plano ABCD es perpendicular al Plano Frontal y al Plano Horizontal, por lo tanto, el plano se vería convertido en una recta y en su proyección del Plano de Perfil, la forma real del plano ABCD, ya que está paralelo al plano de proyección.

Cabe hacer notar que la proyección de filo de un plano nunca debe visualizarse como una recta sino más bien como un plano, en el cual los vértices o puntos de intersección están colocados a diferentes distancias con respecto al plano de proyección.

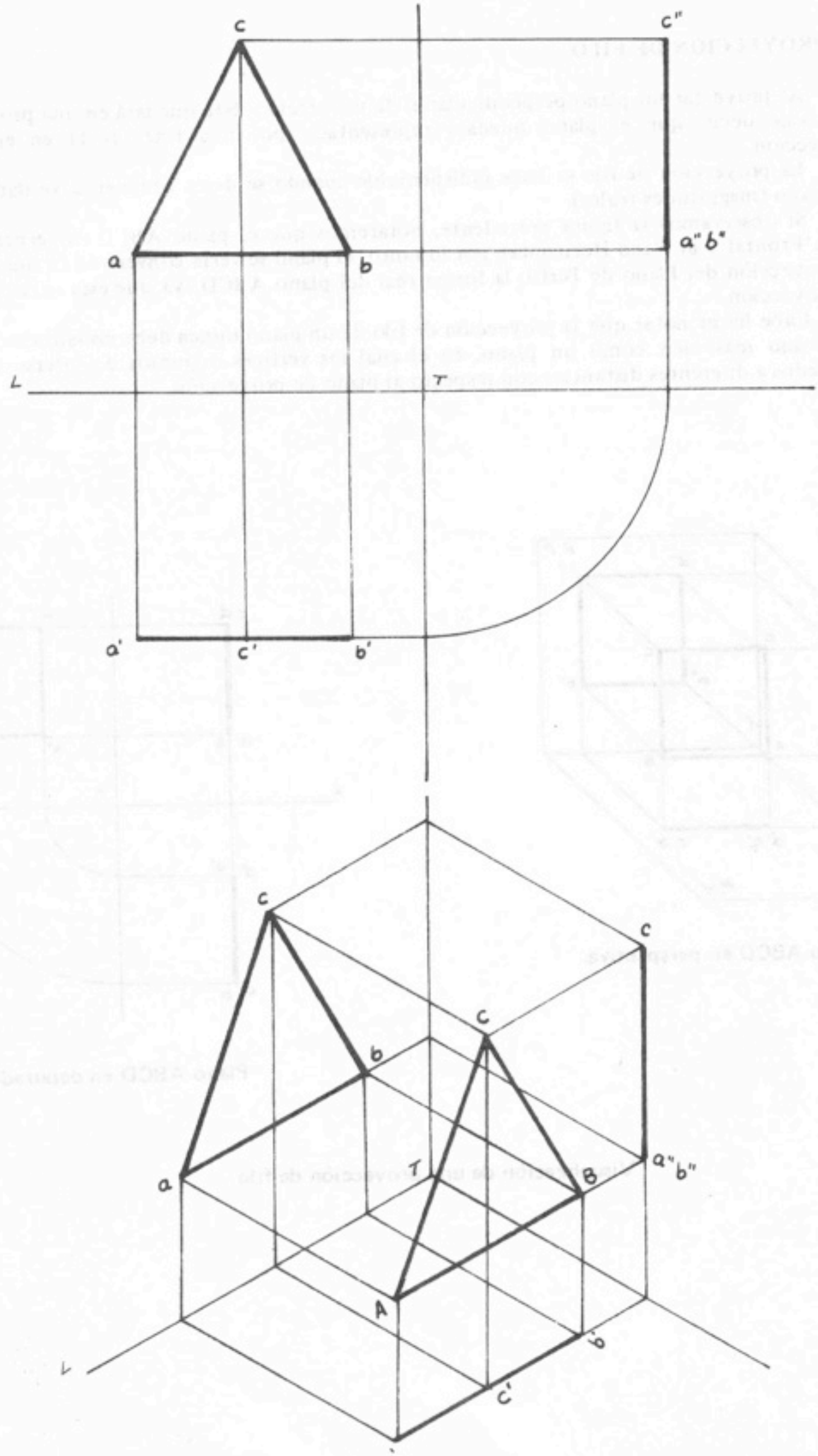


Plano ABCD en perspectiva.



Plano ABCD en depurado.

Visualización de una proyección de filo.

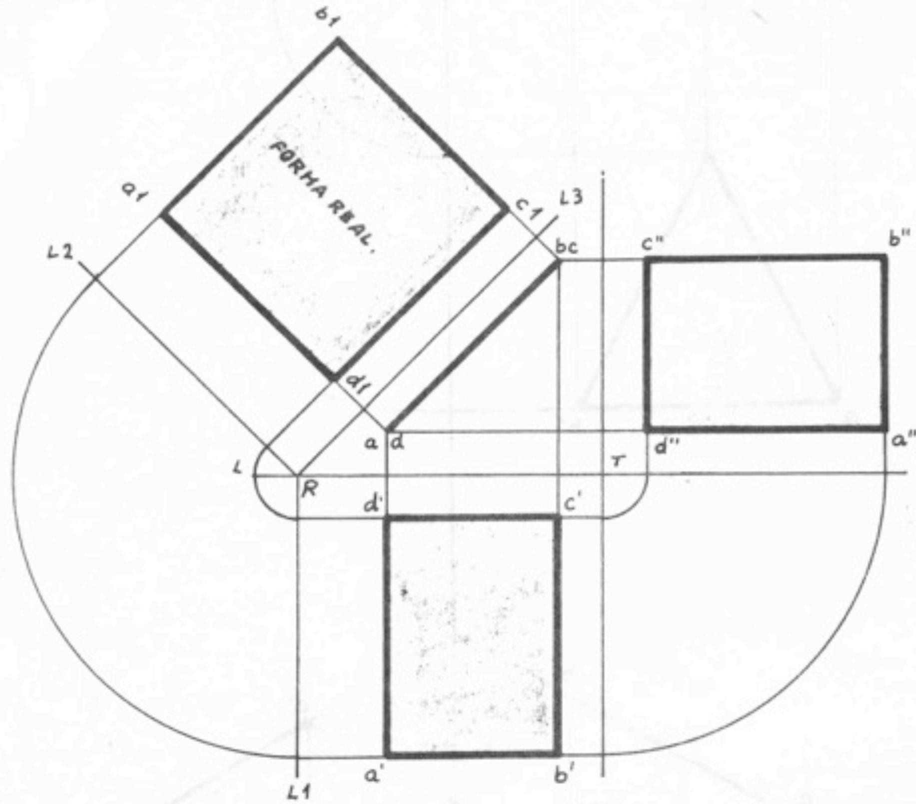


Plano ABC en el espacio, paralelo al P.F. y perpendicular al P.H. y al P.P.

H. DETERMINACION DE LA FORMA REAL DE UN PLANO MEDIANTE LA PROYECCION DE FILO.

Si un plano es oblicuo a dos planos de proyección y perpendicular al tercero, no se visualizará la forma real o verdadera del plano en cuestión, para lo cual debe recurrirse a una nueva proyección por intermedio de la proyección de filo. Hay dos métodos para obtenerla, los cuales son:

a. Método de la rotación de la proyección de filo.



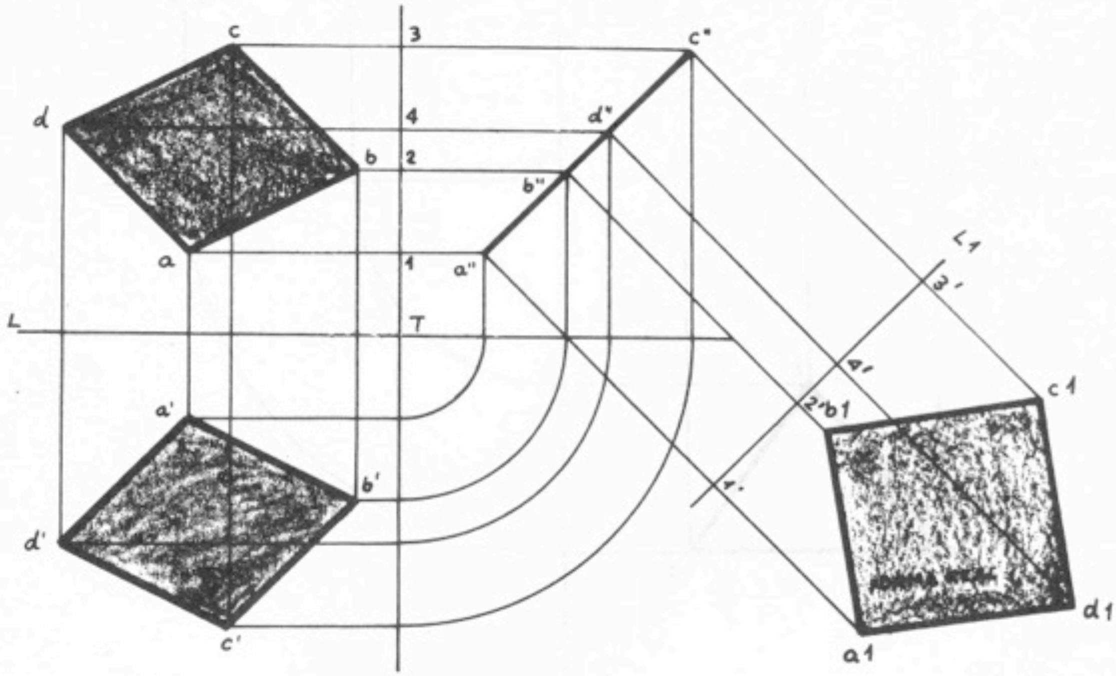
Este método se desarrolla de la siguiente forma:

1. Se dibujan las tres proyecciones del plano ABCD, quedando en una de ellas la proyección de filo.
2. Sobre la L.T. se ubica el punto (R) de rotación, desde el cual nacen los rayos L1 perpendicular a la L.T., L2 perpendicular a la proyección de filo y L3 paralelo a la proyección de filo, formando estos dos últimos un ángulo recto.
3. El lado c'-d' y el lado b'-a' se proyectan con línea de proyección al rayo L1.
4. Con centro en R y en forma radial con líneas de proyección se trasladan los puntos anteriores al rayo L2.
5. Los puntos rotados se proyectan en forma perpendicular y paralela a la proyección de filo.
6. Los puntos ad y bc con líneas de proyección se proyectan en forma perpendicular al plano de filo hasta que éstas se corten con las otras líneas de proyección trazadas anteriormente.
7. Se unen los puntos a1, b1, c1 y d1 con línea de solución, obteniendo así la forma real o verdadera del plano ABCD.

Los rayos L1, L2 y L3 serían los ejes coordenados de un plano auxiliar de proyección que estaría ubicado en el espacio paralelo a la vista de filo, por lo tanto, la inclinación que estos tengan será de acuerdo a la inclinación que tenga la proyección de filo.

b. Método de la aplicación de las coordenadas.

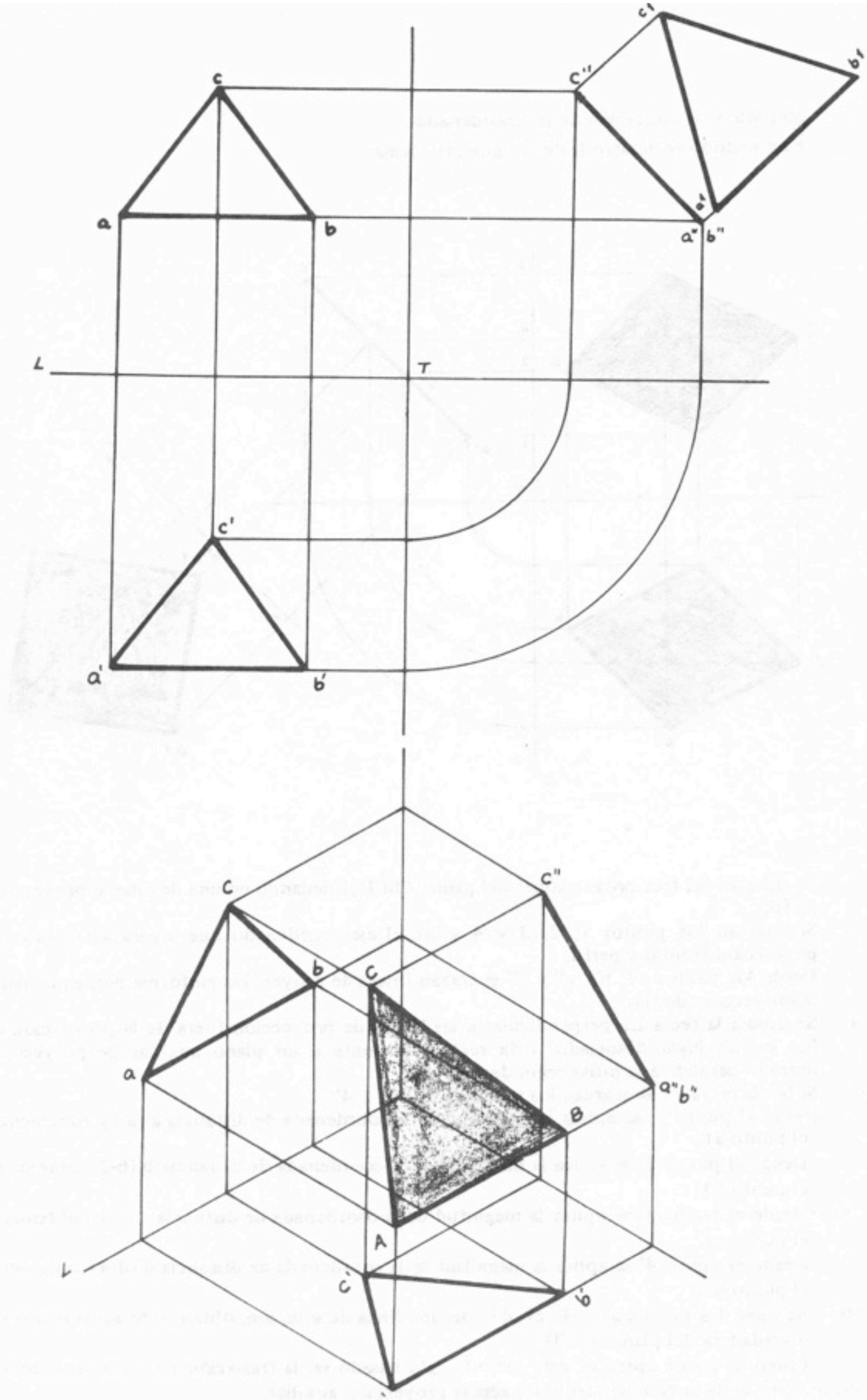
Este método se desarrolla de la siguiente forma:



1. Se dibujan las tres proyecciones del plano ABCD, quedando en una de ellas la proyección de filo.
2. Se marcan los puntos 1, 2, 3 y 4 sobre el eje coordenado que separa los planos de proyección frontal y perfil.
3. Desde los puntos a", b", c" y d" se trazan líneas de proyección en forma perpendicular a la proyección de filo.
4. Se dibuja la recta L1 perpendicular a las líneas de proyección fuera de la proyección de filo en un lugar despejado. Esta recta representa a un plano auxiliar de proyección ubicado paralelo a la proyección de filo.
5. Sobre la recta L1 se marcan los puntos 1', 2', 3' y 4'.
6. Desde el punto 1' se aplica la magnitud de la coordenada de distancia a (a-1), obteniendo el punto a1.
7. Desde el punto 2' se aplica la magnitud de la coordenada de distancia b (b-2), obteniendo el punto b1.
8. Desde el punto 3' se aplica la magnitud de la coordenada de distancia c (c-3), obteniendo el punto c1.
9. Desde el punto 4' se aplica la magnitud de la coordenada de distancia d (d-4), obteniendo el punto d1.
10. Se unen los puntos a1, b1, c1, d1 con una línea de solución, obteniendo así la forma real o verdadera del plano ABCD.

Como se puede apreciar, este método está basado en la traslación de las coordenadas de alejamiento de la proyección frontal hacia la proyección auxiliar.

Habría un sistema práctico para obtener la forma real o verdadera de un plano, basado en la simple traslación de medidas coordenadas que nos dieran las proyecciones en forma directa.



Plano ABC en el espacio, perpendicular al P.P. y oblicuo al P.F. y al P.H.

LOS CUERPOS GEOMETRICOS Y SUS PROYECCIONES

A. DEFINICION

Sabemos que un cuerpo sólido es todo aquello que ocupa un lugar en el espacio y está limitado por superficies que son sus caras que al unirse entre ellas forman ángulos diedros y vértices, por lo tanto, se puede decir que un cuerpo geométrico es el espacio limitado por superficies.

B. CLASIFICACION DE LOS CUERPOS GEOMETRICOS

Si quisiéramos clasificar los cuerpos geométricos, tendríamos que decir que éstos se dividen en grupos formando familias con ciertas características comunes.

Las características que los identifican pueden ser en base a la forma que toman las superficies que le sirven de caras límites, pudiendo ser: planas, curvas y planas o simplemente curvas.

A continuación se presenta un cuadro de los grupos o familias en que se dividen los cuerpos geométricos.

- Cuerpos geométricos
  - Poliedros
    - Regulares
    - Irregulares
      - Prismas
        - Paralelepípedo
        - Regular
        - Irregular
      - Pirámides
        - Regulares
        - Irregulares
  - Redondos
    - Comunes
    - Especiales

Antes de entrar al estudio de los cuerpos geométricos hay que aclarar qué es un ángulo diedro y un vértice.

Angulo diedro es aquél formado por dos planos o superficies rectas que se intersectan formando un ángulo cualquiera, si éste ángulo es de 90 grados se dice que el ángulo diedro es recto.

De lo anteriormente expuesto se desprende entonces, que las aristas de los cuerpos son producto de los ángulos diedros.

Para generalizar se puede decir que los ángulos diedros son ángulos poliedros.

Los vértices de un cuerpo están formados por tres caras o superficies planas que se reúnen en un solo punto, llamándosele a esto vértice o ángulo triedro.

Angulo triedro es el ángulo poliedro formado por tres planos o caras el cual puede tener uno, dos o tres ángulos diedros rectos, en cuyo caso se llama: rectángulo, birrectángulo y trirrectángulo, respectivamente.

A continuación veremos en forma detallada cada uno de los grupos o familias que componen los cuerpos geométricos.

C. POLIEDROS REGULARES

Los poliedros (del griego polys, muchas, y édra, cara) son cuerpos geométricos limitados por todas partes por planos. Esos planos, limitándose mutuamente, constituyen las caras del poliedro, cuyas intersecciones son las aristas y los puntos en que se encuentran esas intersecciones son los vértices.

Un poliedro es regular cuando todas sus caras son polígonos regulares iguales y todos sus ángulos diedros son también iguales.

De acuerdo al número de caras, tenemos los siguientes poliedros regulares, que son: tetraedro, hexaedro u ortoedro, octaedro, dodecaedro y el icosaedro.

a. El tetraedro

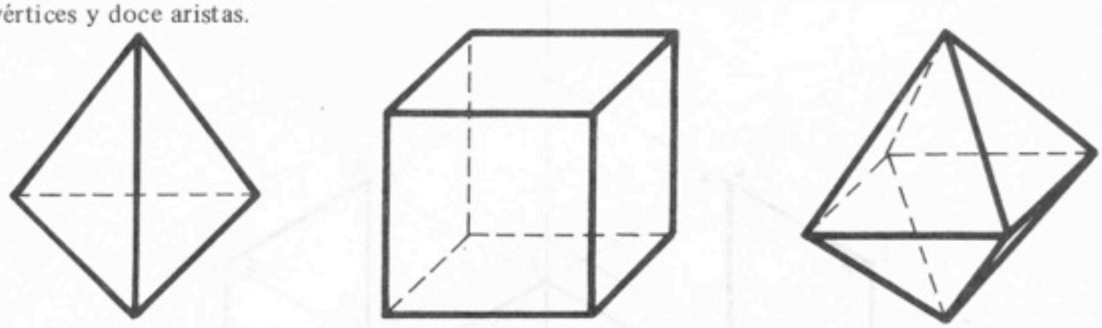
El tetraedro es aquel poliedro regular que está formado por cuatro caras planas que son triángulos equiláteros. Es el más sencillo de todos, puesto que con tres planos no se puede cerrar ningún espacio. Sus ángulos poliedros son todos triedros, cuyos ángulos planos miden 60 grados y la perpendicular trazada desde un vértice a la cara opuesta pasa por el centro de ella. Sus vértices son cuatro y sus aristas son seis.

b. El hexaedro

El hexaedro es aquel poliedro regular que está formado por seis caras planas que son cuadradas, siendo sus ángulos poliedros triedros trirrectángulos, es decir, que las tres aristas que concurren a un vértice son perpendiculares entre sí. Las caras contiguas son perpendiculares, y sus diedros, por lo tanto, rectos. Las caras opuestas son paralelas, teniendo además ocho vértices y doce aristas.

c. El octaedro

El octaedro es un poliedro regular que está formado por ocho caras planas que son triángulos equiláteros. Las cuatro caras de sus ángulos poliedros miden 60 grados. Tienen seis vértices y doce aristas.



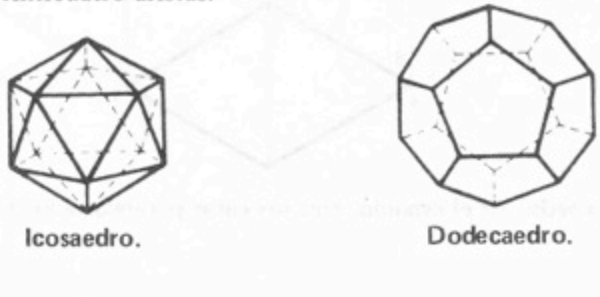
Tetraedro. Hexaedro (cubo). Octaedro.

d. El dodecaedro

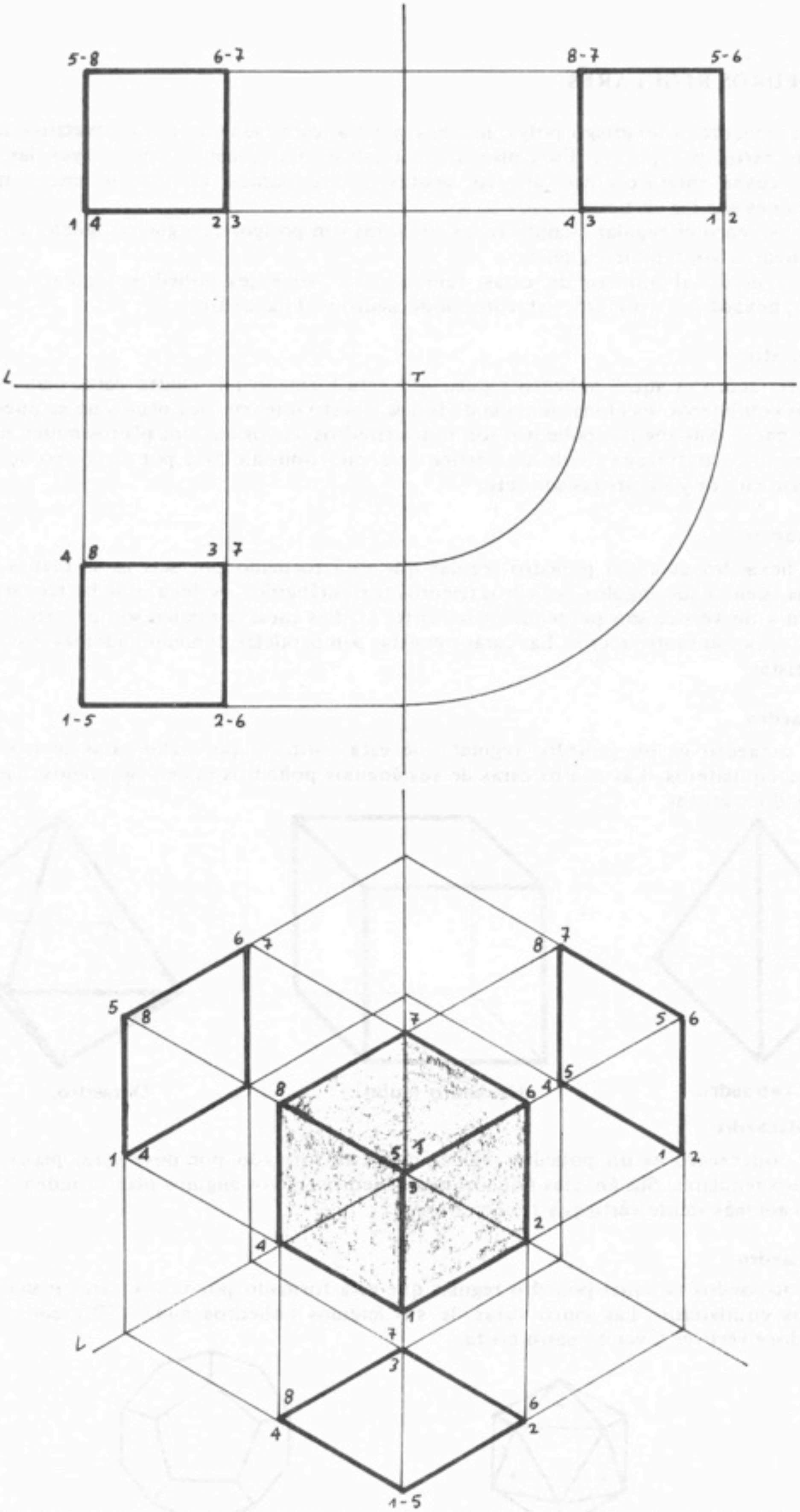
El dodecaedro es un poliedro regular que está formado por doce caras planas que son pentágonos regulares. Sus ángulos poliedros son triedros, cuyos ángulos planos miden 72 grados, teniendo además veinte vértices y treinta aristas.

e. El icosaedro

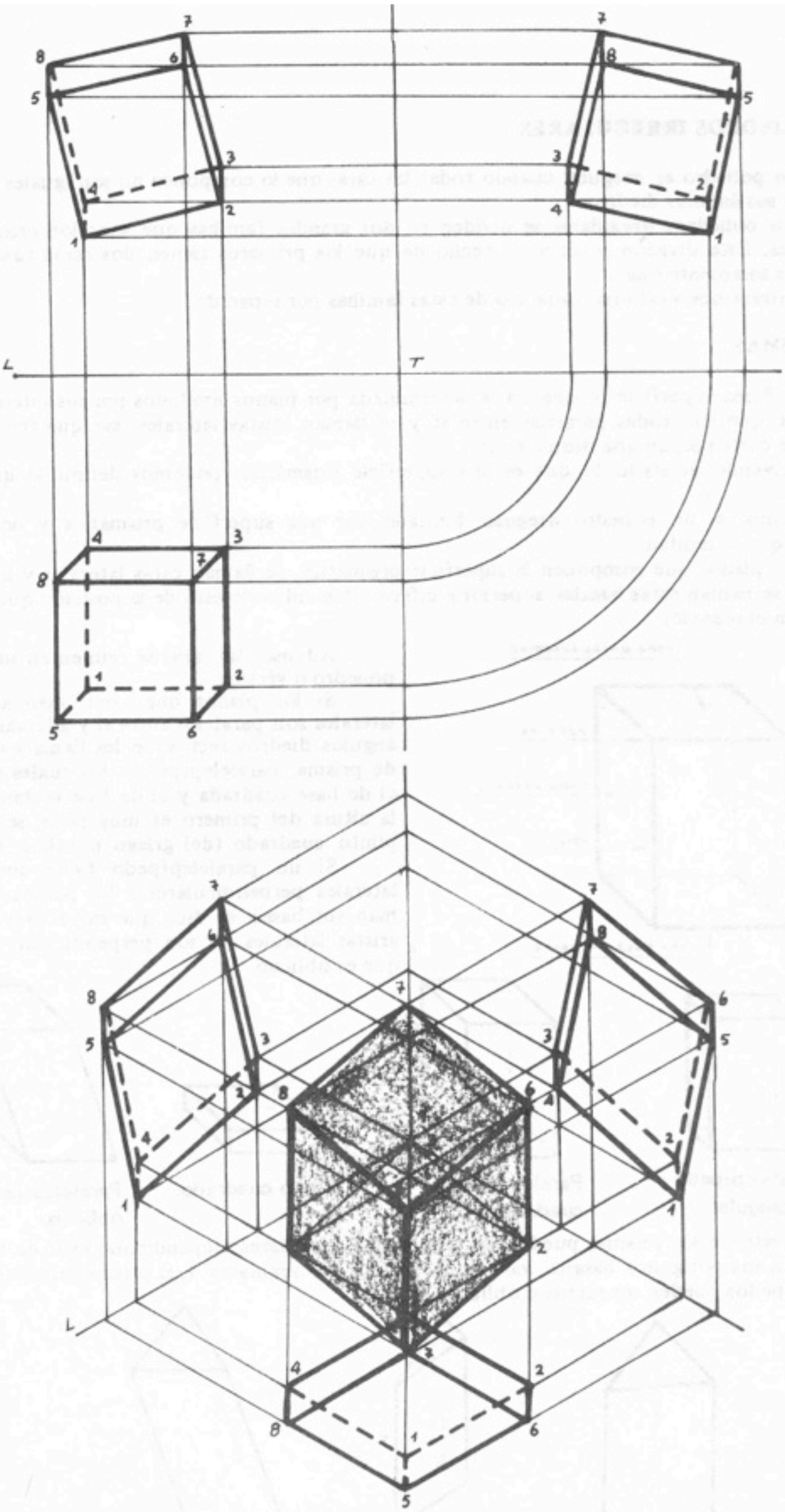
El icosaedro es aquel poliedro regular que está formado por veinte caras planas que son triángulos equiláteros. Las cinco caras de sus ángulos poliedros miden 60 grados, teniendo además doce vértices y veinticuatro aristas.



Icosaedro. Dodecaedro.



Proyección de un hexaedro en el espacio, con sus caras paralelas a los tres planos de proyección.



Proyección de un hexaedro en el espacio, con sus caras oblicuas a los tres planos de proyección.

D. POLIEDROS IRREGULARES

Un poliedro es irregular cuando todas las caras que lo componen no son iguales como así también sus ángulos diedros.

Los poliedros irregulares se dividen en dos grandes familias que son: los prismas y las pirámides. Esta división se debe al hecho de que los primeros tienen dos caras basales y los segundos solamente una.

Entraremos a estudiar cada una de estas familias por separado.

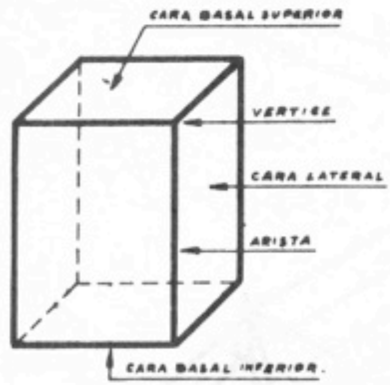
E. PRISMAS

Se llama superficie prismática la determinada por planos limitados por sus intersecciones sucesivas, que son todas paralelas entre sí y se llaman aristas laterales, sin que tres de estos planos se corten según una misma recta.

Habiendo aclarado lo que es una superficie prismática, podemos definir lo que es un prisma.

Prisma es un poliedro irregular limitado por una superficie prismática y dos planos secantes que la limitan.

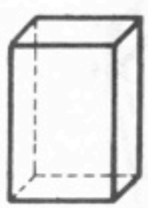
Los planos que componen la superficie prismática, se llaman caras laterales y los planos secantes se llaman caras basales, superior e inferior dependiendo esto de la posición que tenga el cuerpo en el espacio.



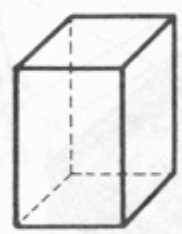
Además las caras se reúnen en un ángulo poliedro o vértice.

Si los planos que componen sus caras laterales son paralelos entre sí y además forman ángulos diedros rectos, se les llama a este tipo de prisma, paralelepípedos, los cuales son dos: el de base cuadrada y el de base rectangular. Si la altura del primero es muy poca, se le llama plinto cuadrado (del griego plinthos, ladrillo).

Si un paralelepípedo tiene sus aristas laterales perpendiculares a los planos que forman sus bases, se dice que es recto y si estas aristas laterales no son perpendiculares se dice que es oblicuo.

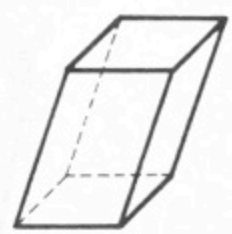


Paralelepípedo rectangular



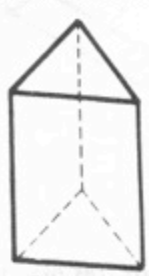
Paralelepípedo cuadrado.

Plinto cuadrado.



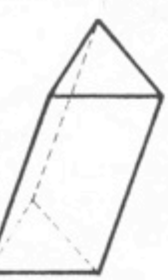
Paralelepípedo oblicuo.

El resto de los prismas pueden ser regulares o irregulares, dependiendo esto de la forma que tengan sus polígonos basales, vale decir, si son o no regulares. Los prismas al igual que los paralelepípedos pueden ser rectos u oblicuos.

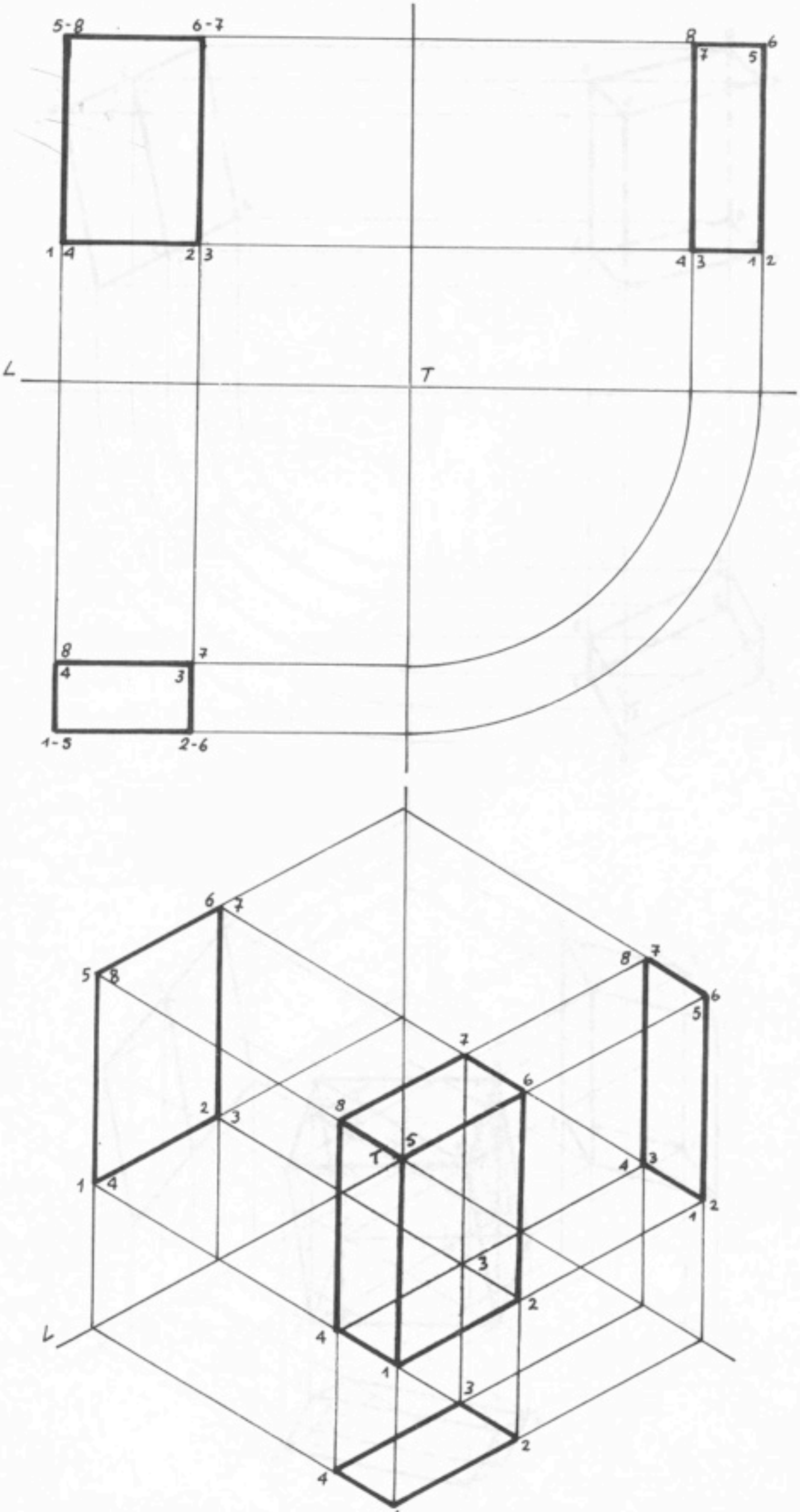


Prisma regular.

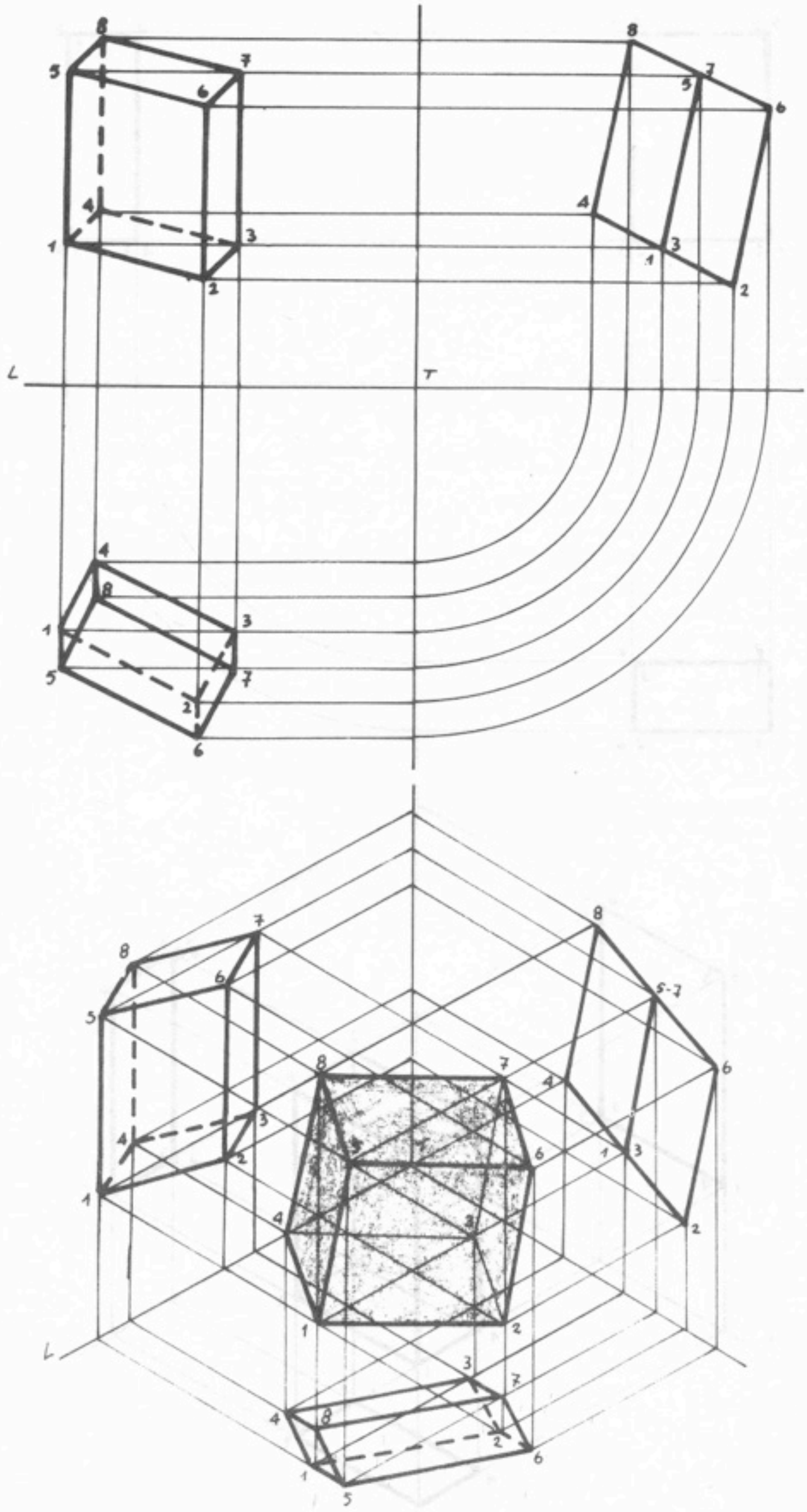
Prisma irregular.



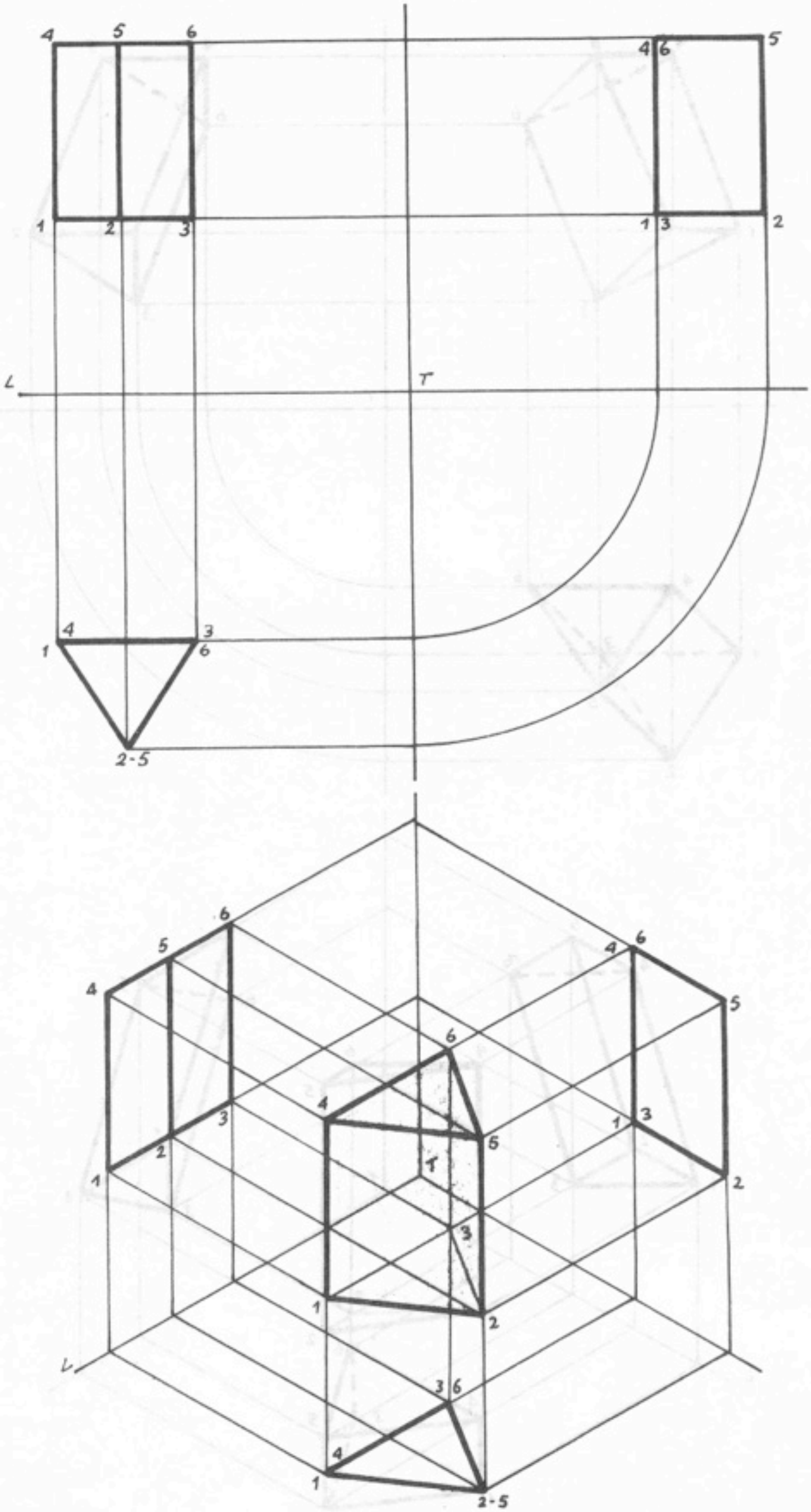
Prisma oblicuo.



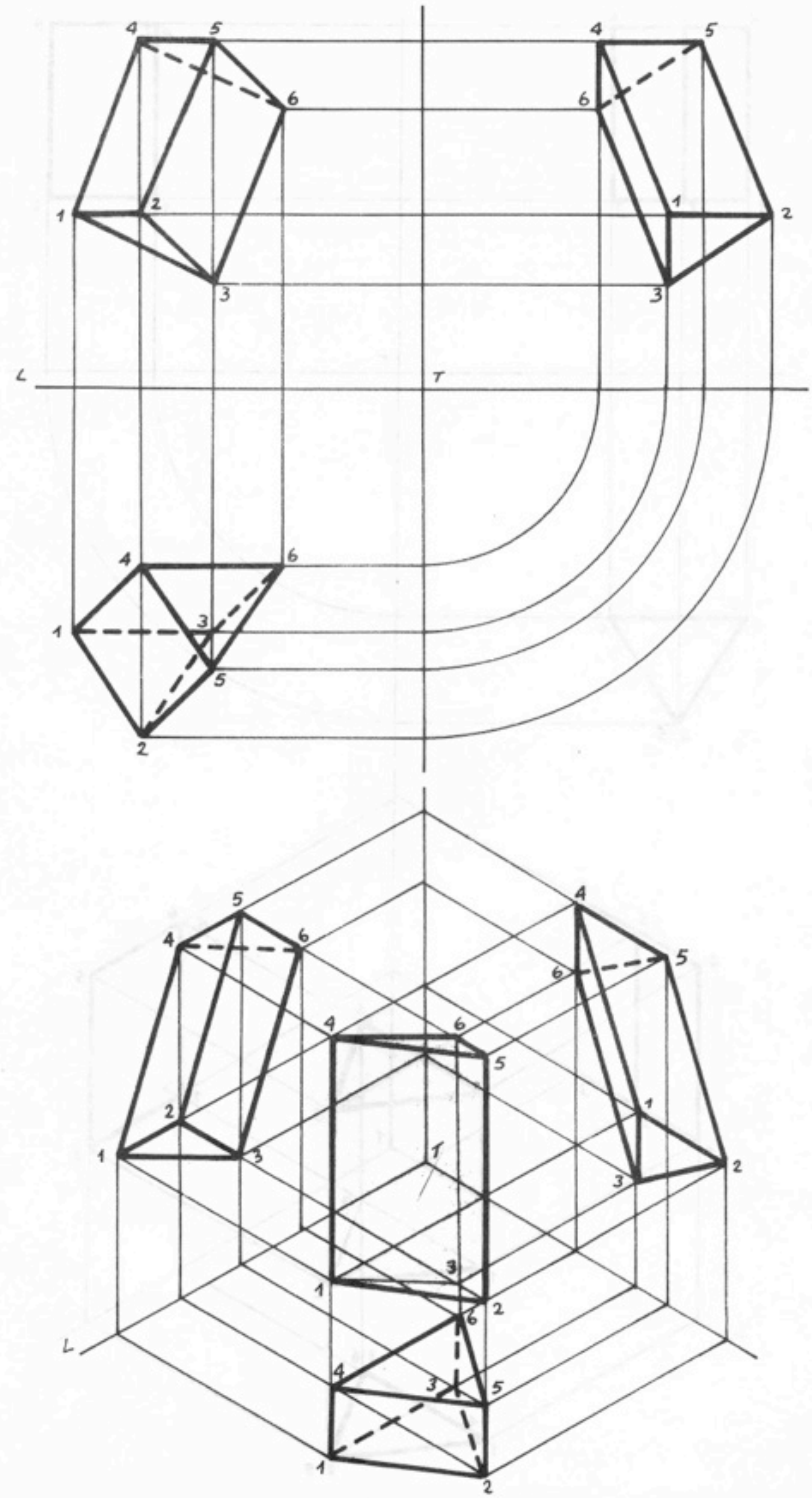
Proyección de un paralelepípedo de base rectangular en el espacio, paralelo al P.F. y al P.P. perpendicular al P.H.



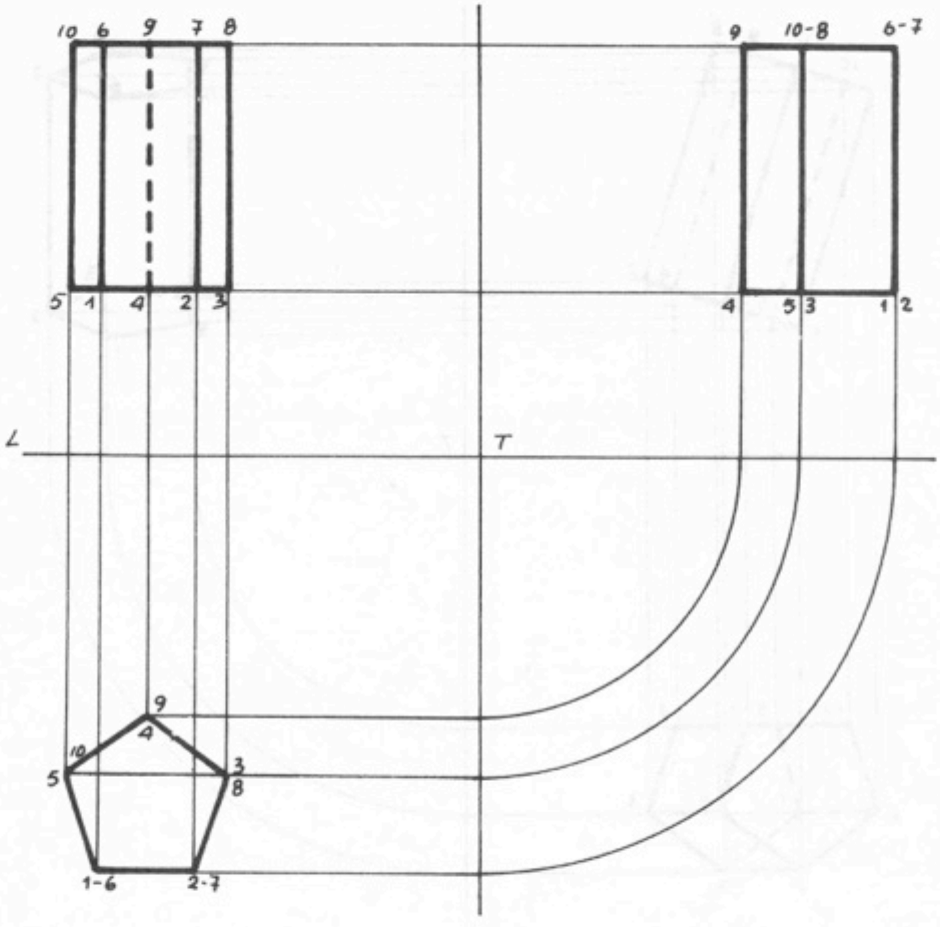
Proyección de un paralelepípedo de base rectangular en el espacio, oblicuo a los tres planos de proyección.

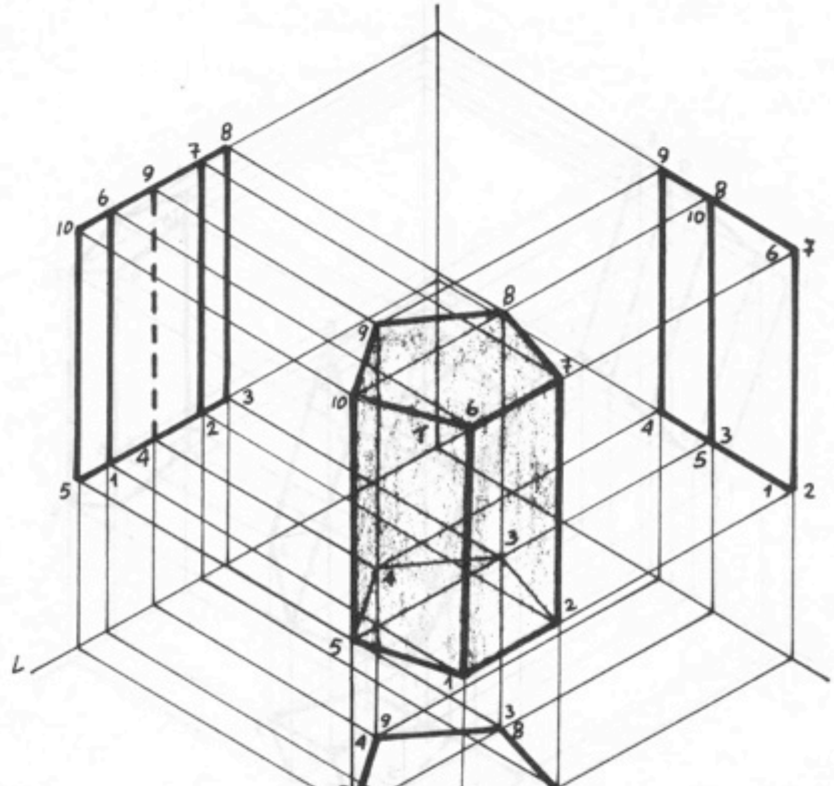


Proyección de un prisma triangular recto regular en el espacio, paralelo al P.F. y al P.P. perpendicular al P.H.

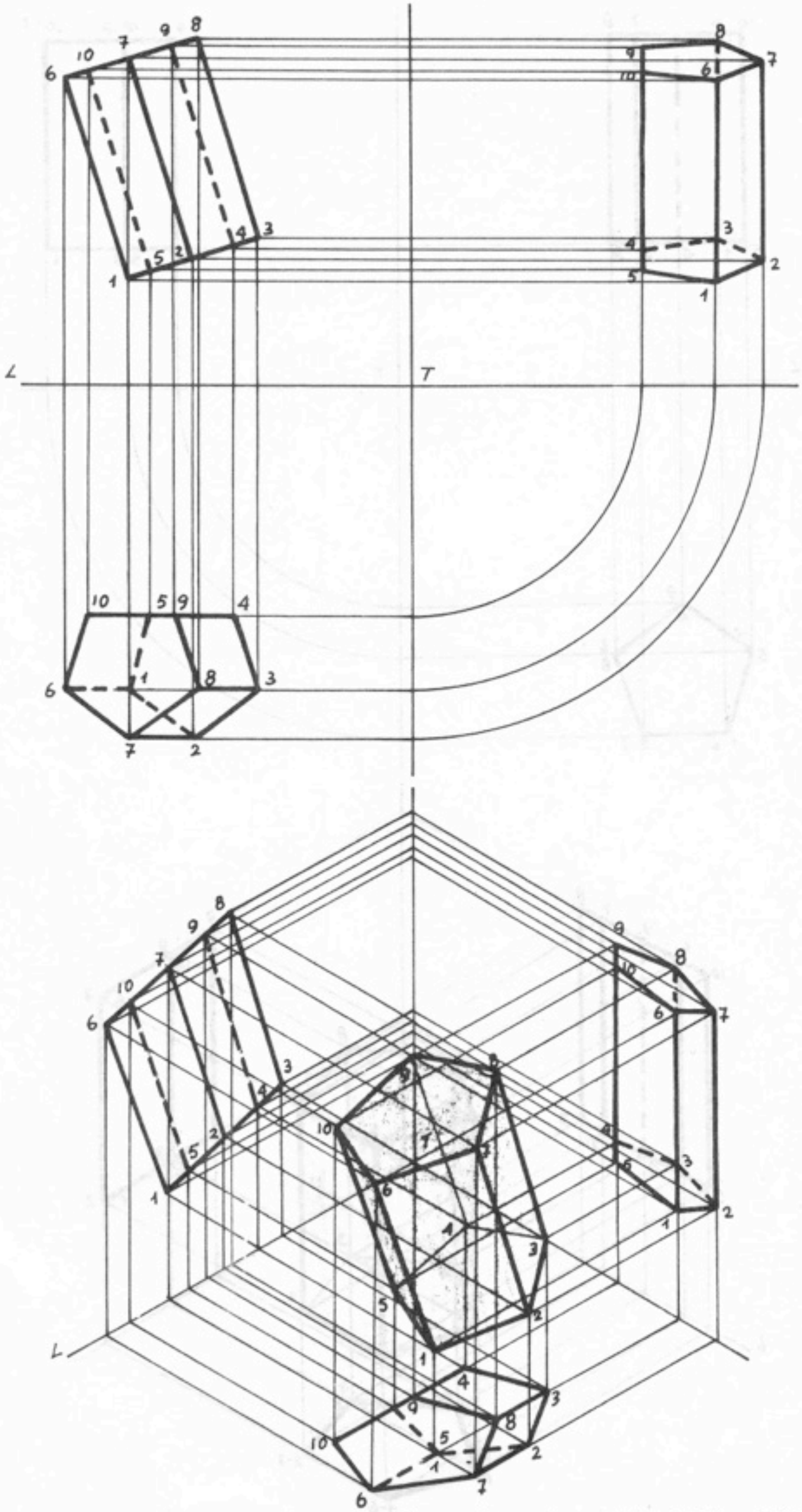


Proyección de un prisma triangular recto regular en el espacio, oblicuo a los tres planos de proyección.





Proyección de un prisma pentagonal recto regular en el espacio, paralelo al P.F. y al P.P. perpendicular al P.H.



Proyección de un prisma pen agonal recto regular en el espacio, paralelo al P.F. y al P.P. oblicuo al P.H.

F. PIRAMIDES

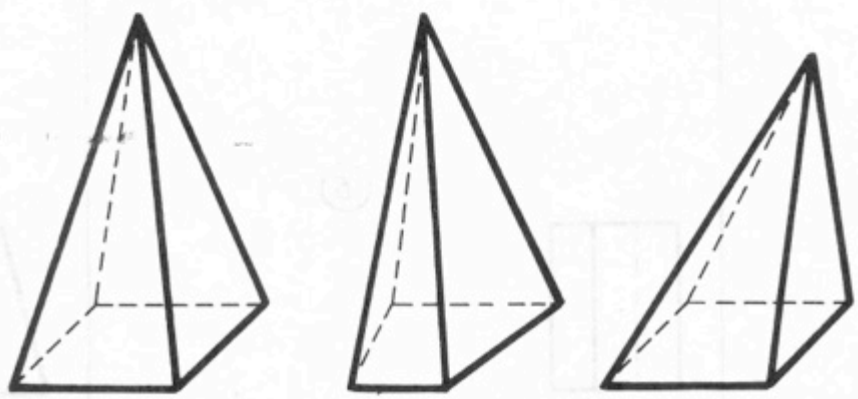
Las pirámides son cuerpos poliédricos irregulares que tienen una cara basal que es un polígono cualquiera y las otras son triangulares y se llaman caras laterales.

Las caras laterales son todas concurrentes a un vértice común llamado cúspide y las aristas que estas caras forman se llaman aristas laterales.

La altura de los triángulos que forman las caras laterales se llaman apotemas.

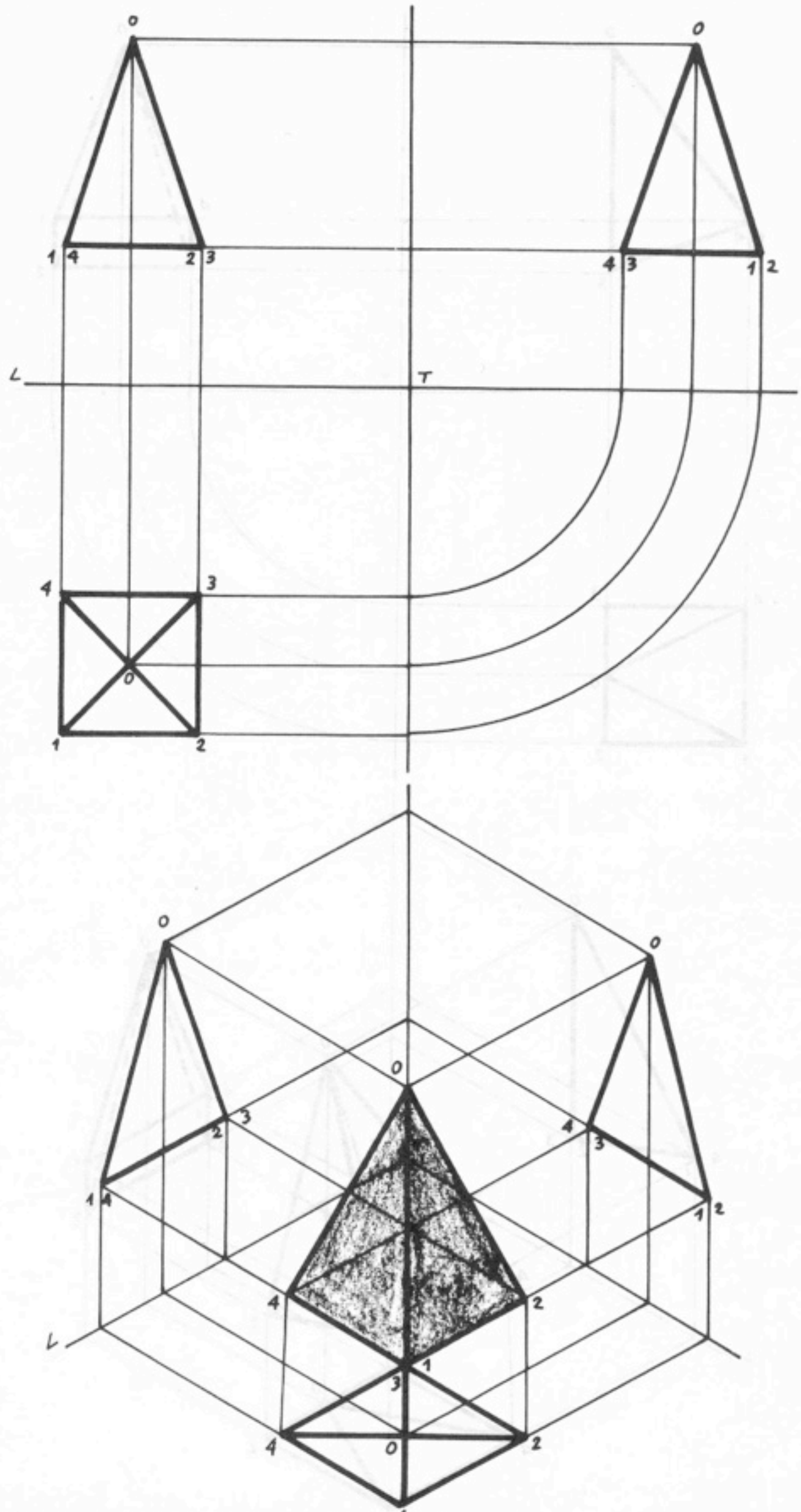
Pirámide regular es aquella que tiene un polígono regular como base y las aristas laterales son iguales entre sí, por lo tanto, el pie de la altura coincide con el centro de la base.

Si una pirámide no cumple los requisitos anteriormente señalados, se dice que es una pirámide irregular, vale decir, que no tenga la cara basal regular o bien la cúspide no coincida con el centro de la base. En el primer caso se dice que es una pirámide irregular y en el segundo caso se dirá que es una pirámide oblicua.

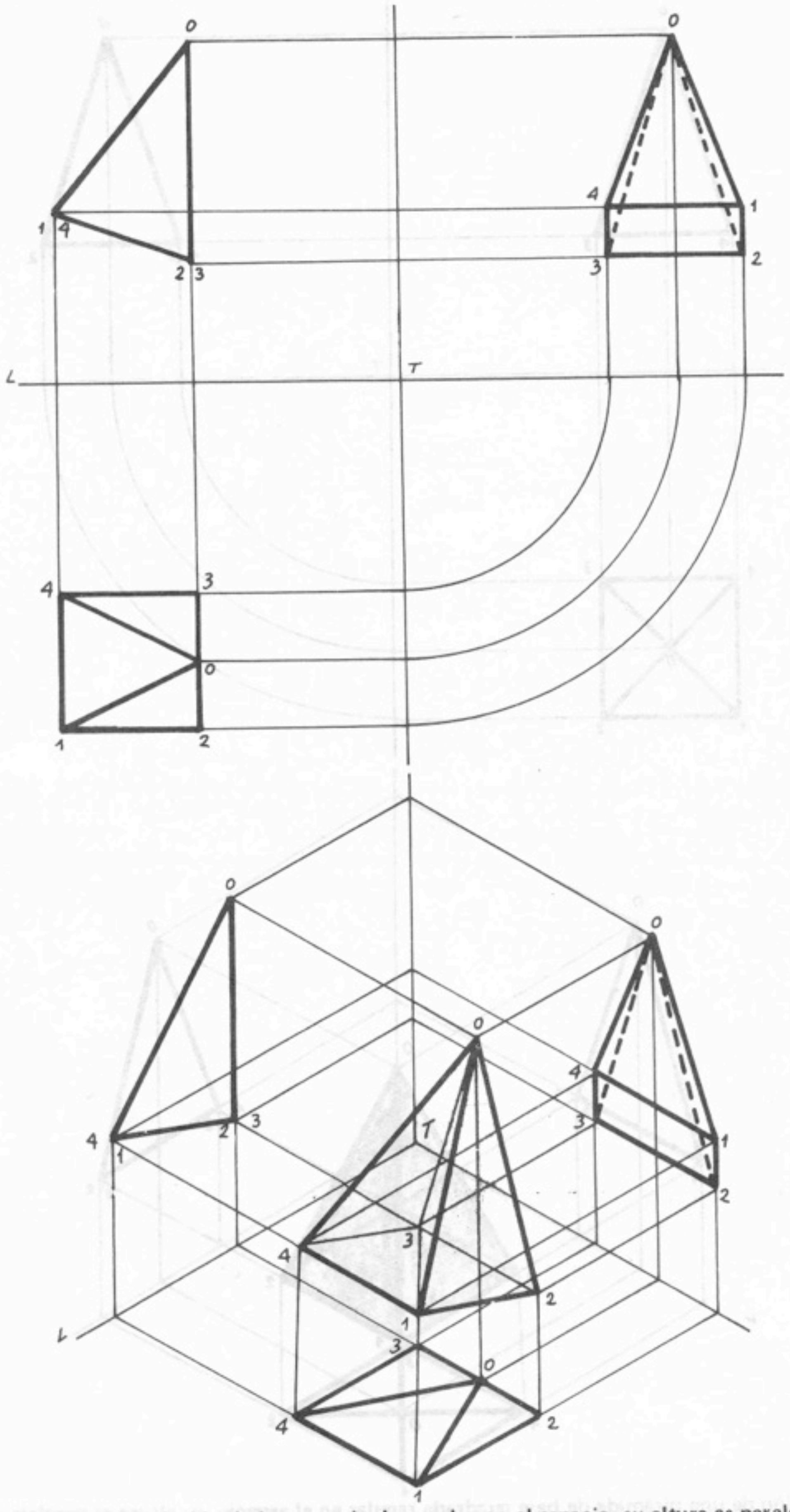


Regular. Irregular. Oblicua.

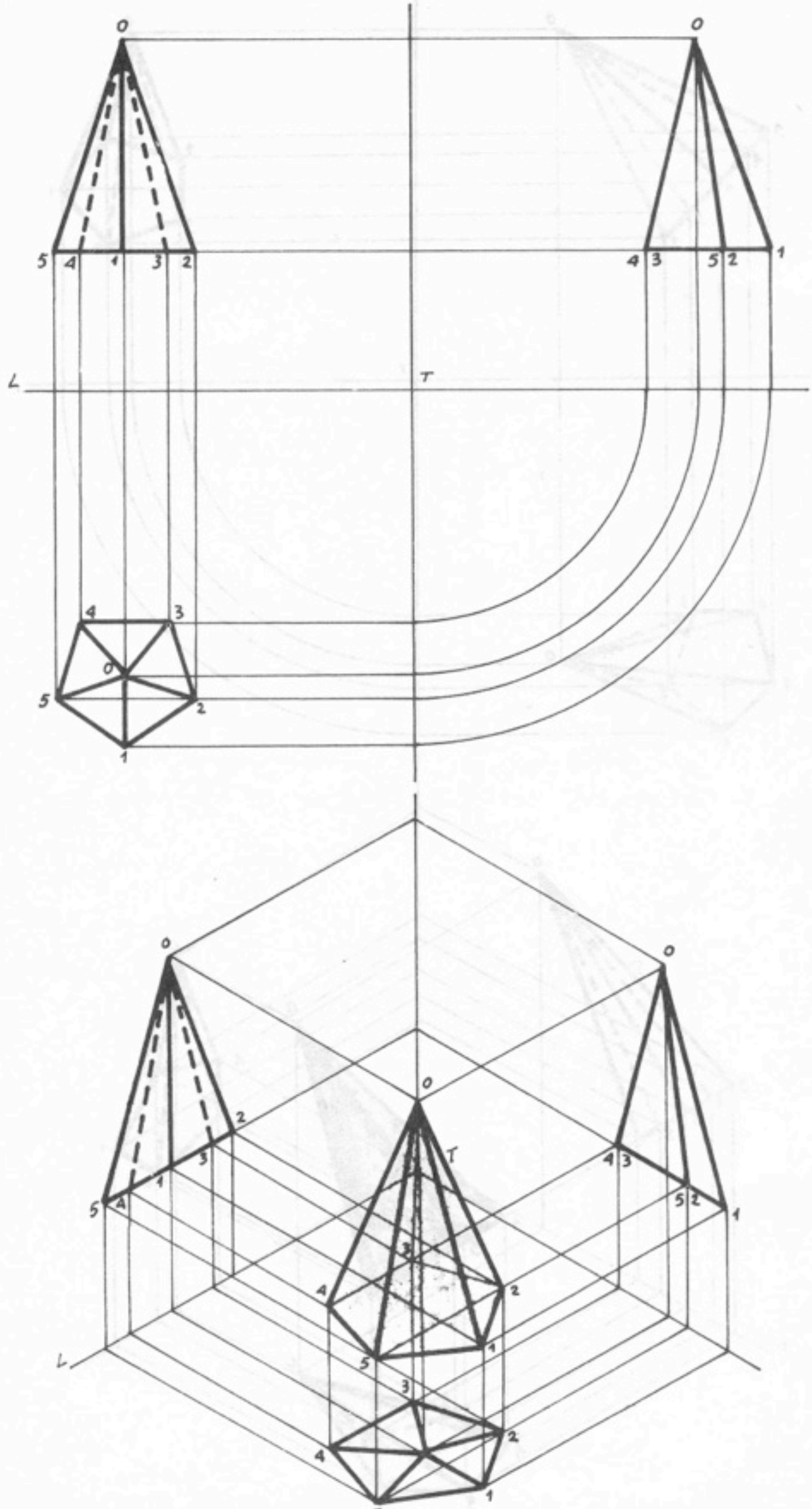
Por último diremos que la altura de una pirámide es la perpendicular desde la cúspide bajada al plano que le sirve de base.



Proyección de una pirámide de base cuadrada regular en el espacio, su altura es paralela al P.F. y al P.P. perpendicular al P.H.



Proyección de una pirámide de base cuadrada regular en el espacio, su altura es paralela al P.F. oblicua al P.H. y al P.P.



Proyección de una pirámide de base pentagonal regular en el espacio, su altura es paralela al P.F. y al P.P. perpendicular al P.H.

DESARROLLO DE CUERPOS GEOMETRICOS

El tiempo que se ocupa en los cursos técnicos, ingeniería y dibujo técnico es reducido en la parte correspondiente a los desarrollos de cuerpos geométricos en tal forma que se ha hecho necesario condensar la materia dedicada a este capítulo, por lo tanto, se han presentado solamente los cuerpos fundamentales esperando que éstos sean suficientes para satisfacer las necesidades de los alumnos frente a los programas de estudios.

A. DEFINICION

Desarrollo es la representación del desdoblamiento que sufre un cuerpo al ser colocado sobre un plano geométrico. Un cuerpo geométrico desarrollado muestra todas sus caras en tamaño real, las líneas en su longitud verdadera y los ángulos en su real amplitud.

B. TIPOS DE SUPERFICIES

Antes de analizar por separado cada uno de los desarrollo es conveniente hacer un estudio de las superficies que componen las caras de los cuerpos geométricos, los cuales tienen cuatro tipos de superficie.

a. Superficies planas son aquellas generadas por una recta que se mueve en contacto con dos rectas que se cortan (poliedros regulares e irregulares).

b. Superficies de curvatura simple, son aquellas generadas por una recta que se mueve en contacto con una curva y en que las dos generatrices consecutivas son paralelas o se intersectan (cilindro, cono y convoluta).

c. Superficies de curvatura doble, son aquellas generadas por una curva variable de modo que produzca una superficie no reglada (esfera, toro, elipsoide, paraboloide, hiperboloide y serpentín).

d. Superficies alabeadas es aquella superficie reglada, generada por el movimiento continuo de una recta de tal forma que no hay dos posiciones consecutivas que estén en el mismo plano (paraboloide hiperbólico, cilindroide, conoide, helicoide, cono alabeado, cuerno de vaca e hiperboloide).

Lo dicho anteriormente se sintetiza en el cuadro siguiente.

- Tipos de superficies
  - Regladas
    - Plana
    - Curvatura simple
    - Alabeadas
  - No regladas
    - Curvatura doble

La terminología empleada anteriormente se explica de la siguiente forma:

Superficie reglada es aquella donde se puede aplicar el canto de una regla, de modo que éste coincida perfectamente con la superficie, debiéndose a esto el nombre de regladas y no regladas.

Generatriz es una recta móvil que genera la superficie.

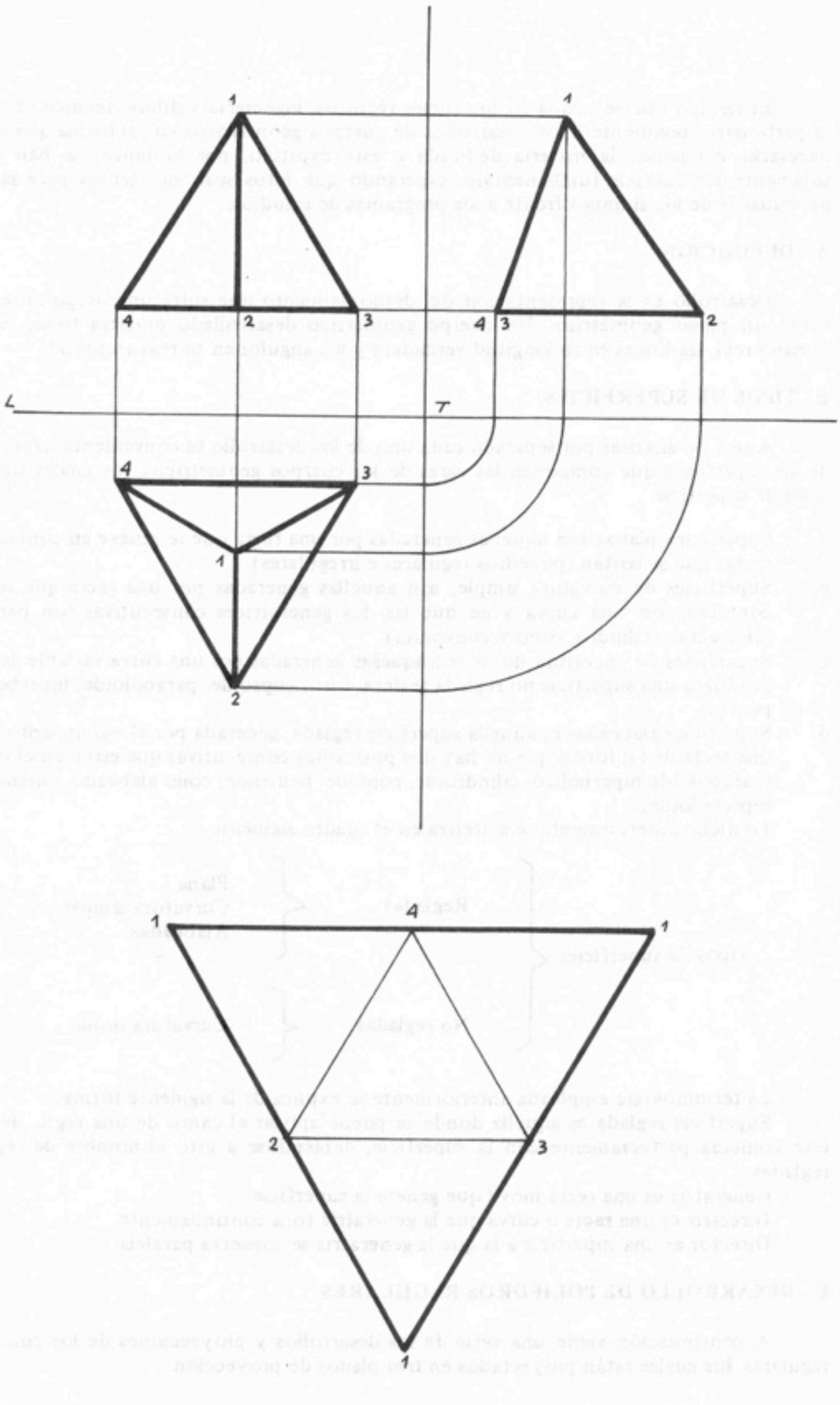
Directriz es una recta o curva que la generatriz toca continuamente.

Director es una superficie a la que la generatriz se conserva paralela.

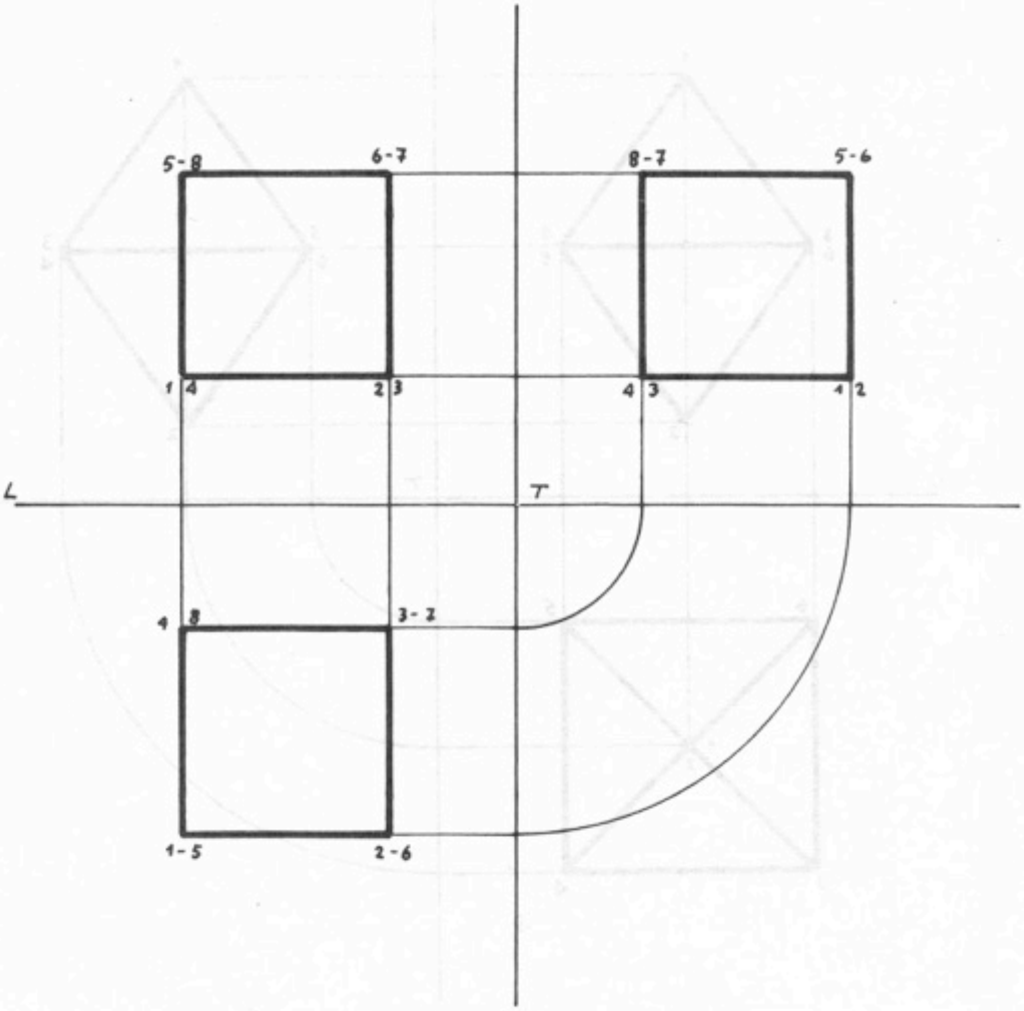
C. DESARROLLO DE POLIEDROS REGULARES

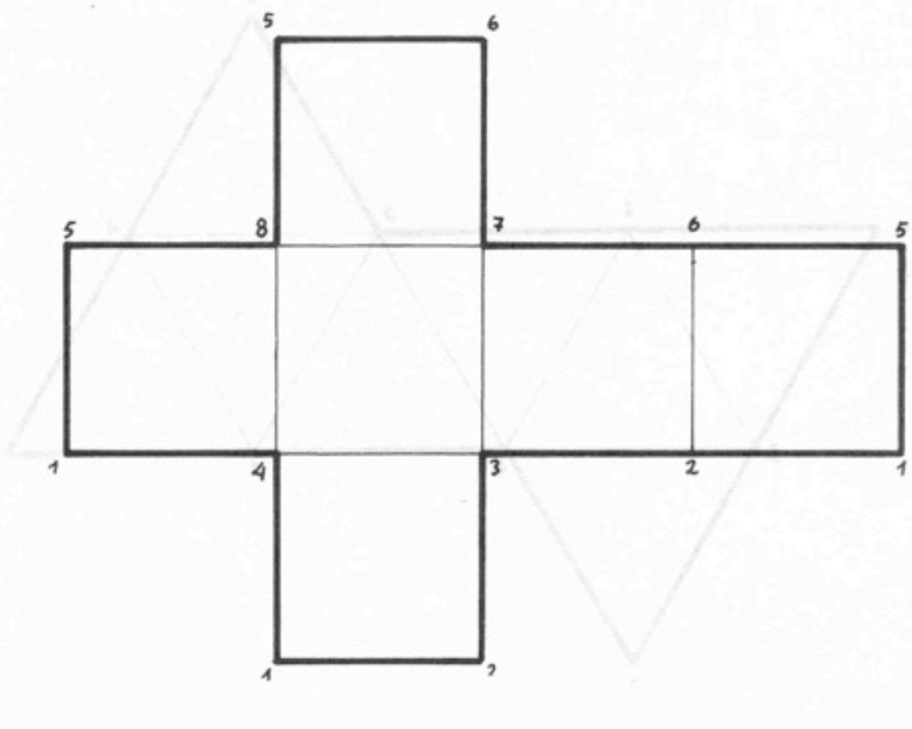
A continuación viene una serie de los desarrollos y proyecciones de los cinco poliedros regulares, los cuales están proyectados en tres planos de proyección.

Proyección y desarrollo de un tetraedro.

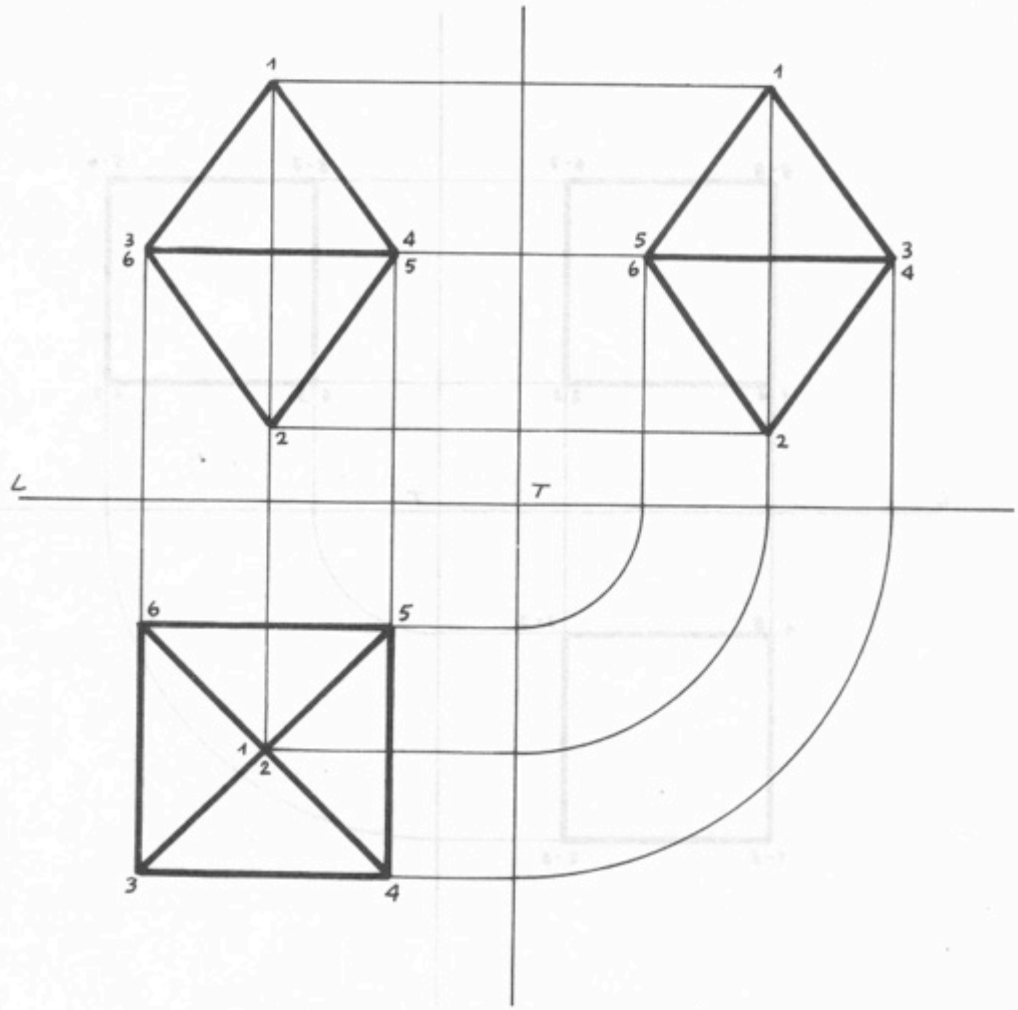


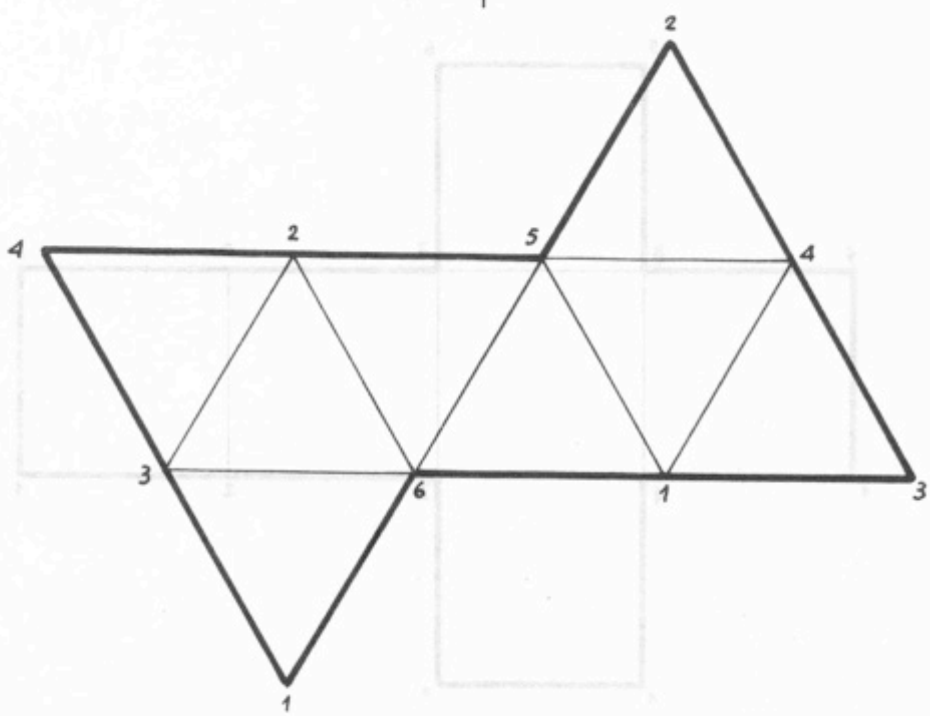
Proyección y desarrollo de un hexaedro.



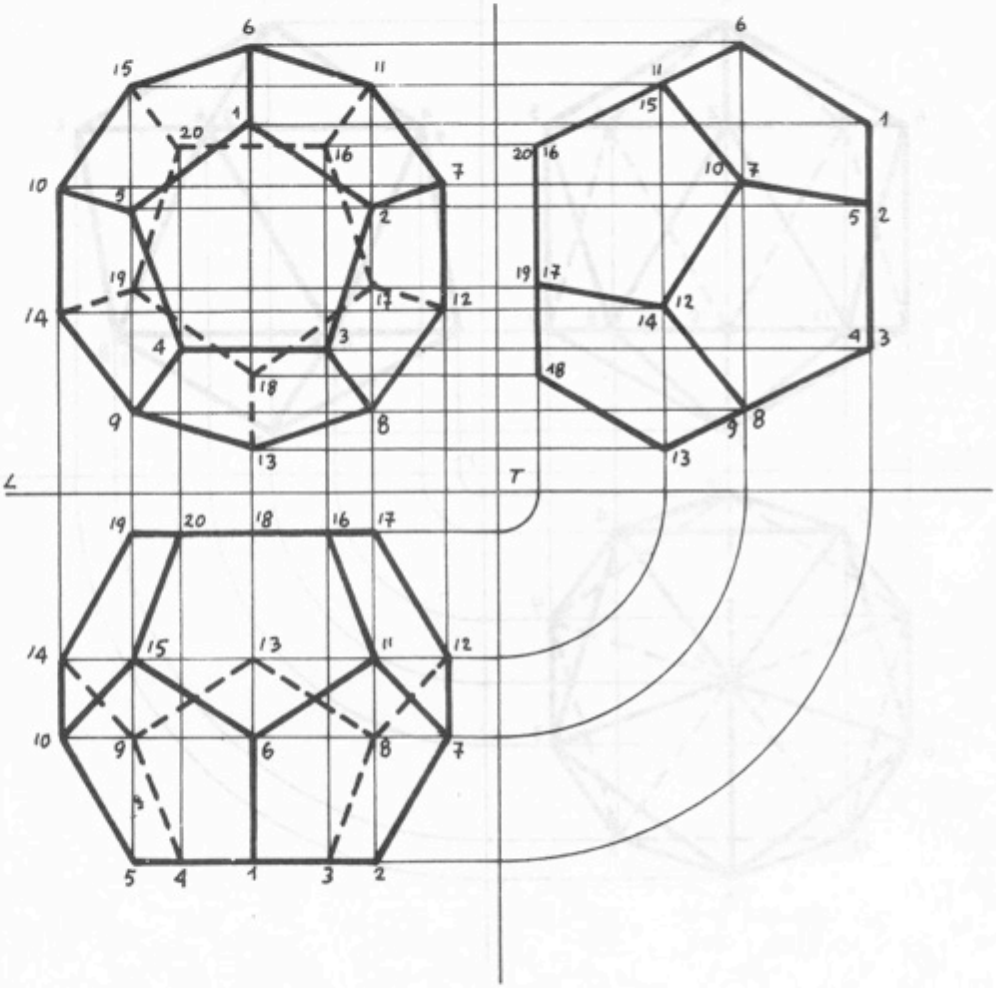


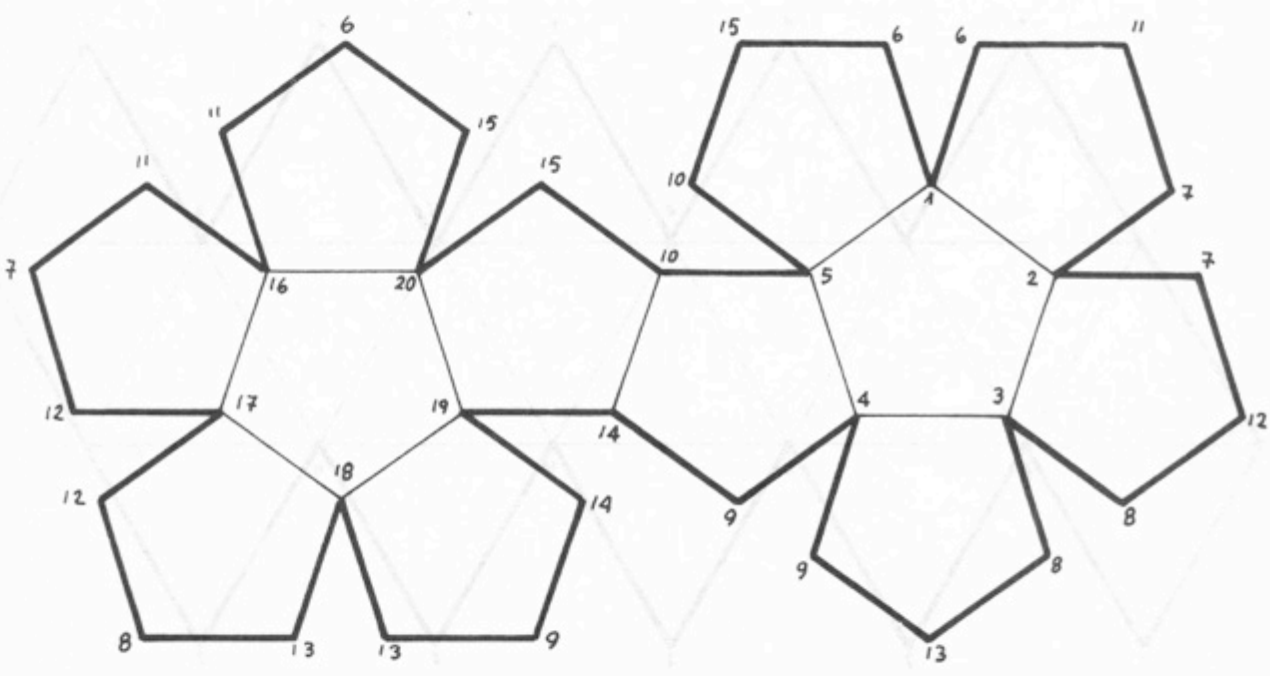
Proyección y desarrollo de un octaedro.



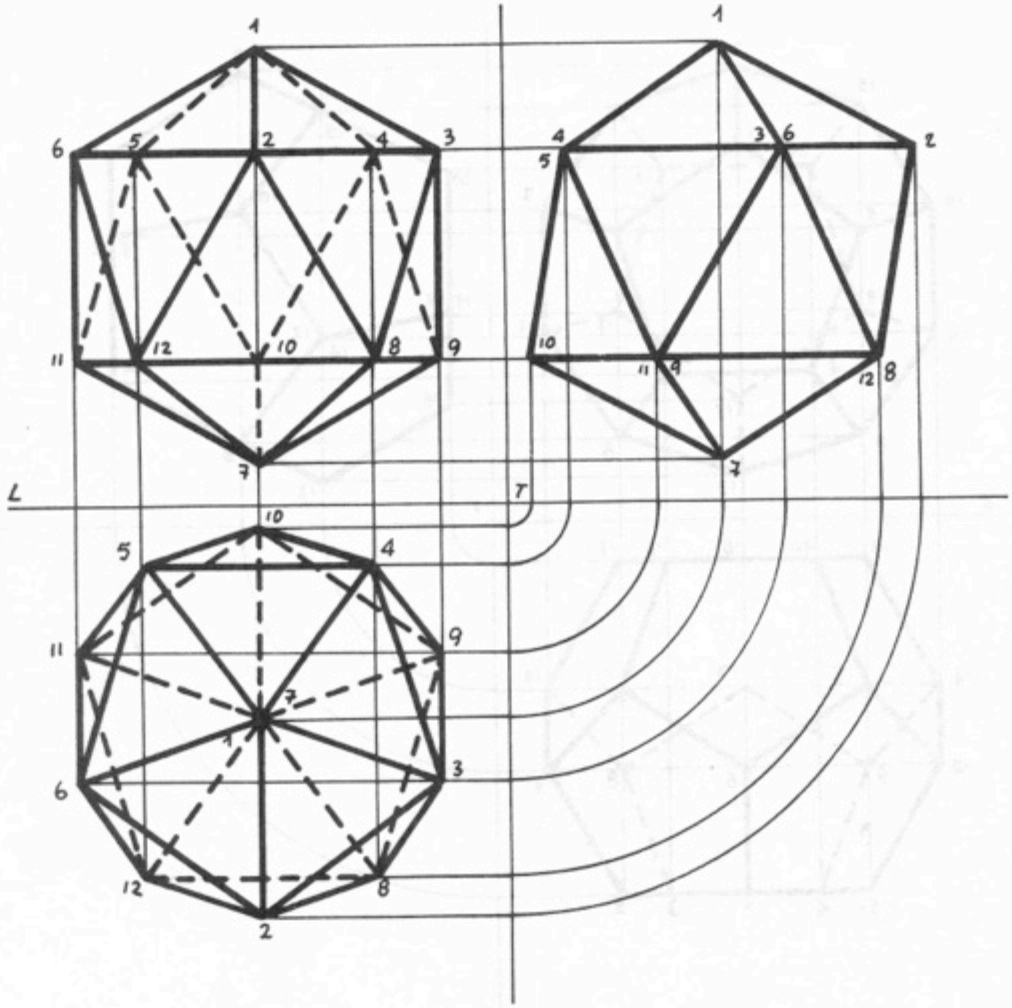


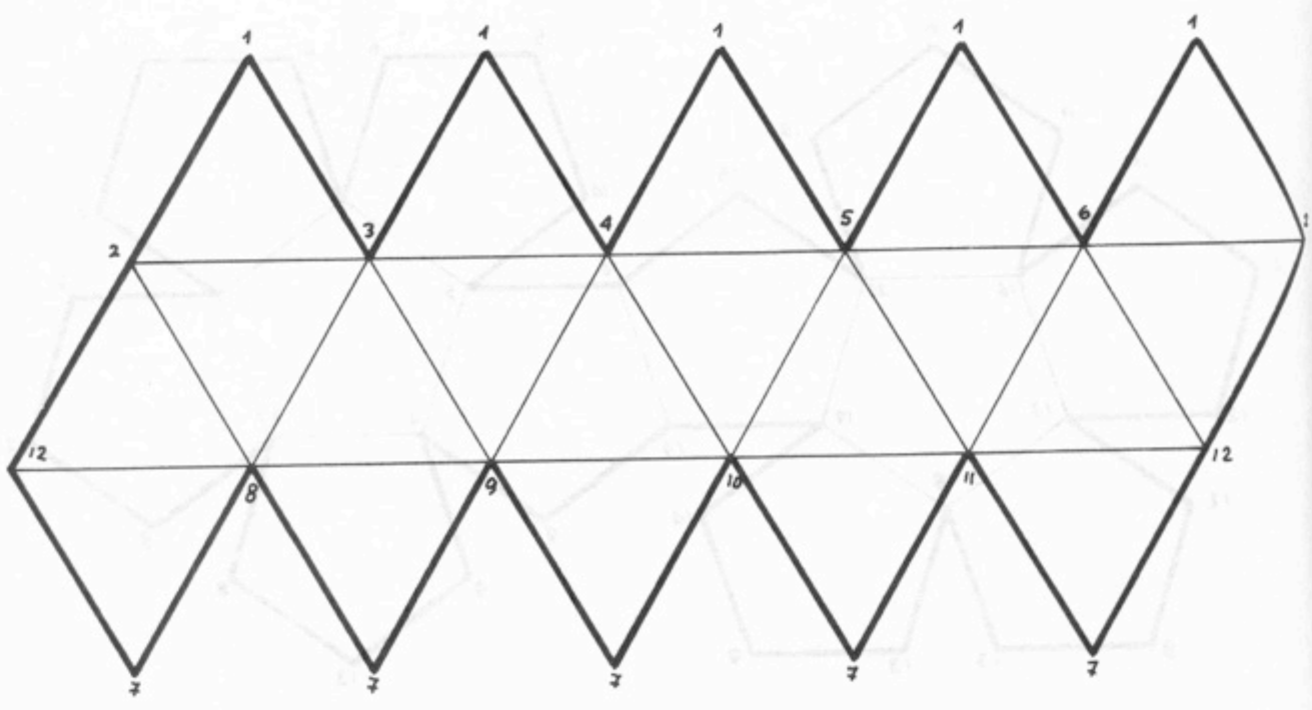
Proyección y desarrollo de un dodecaedro.





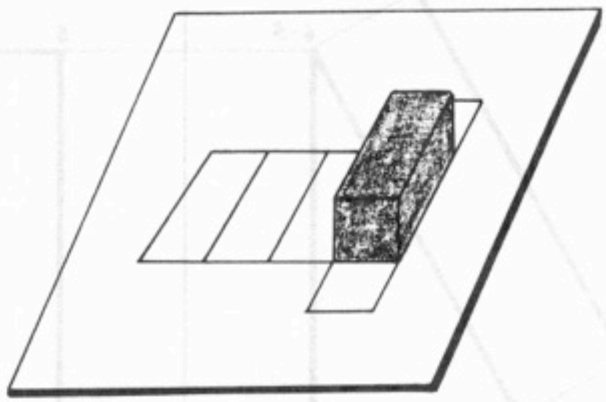
Proyección y desarrollo de un icosaedro.





D. DESARROLLO DE PRISMAS

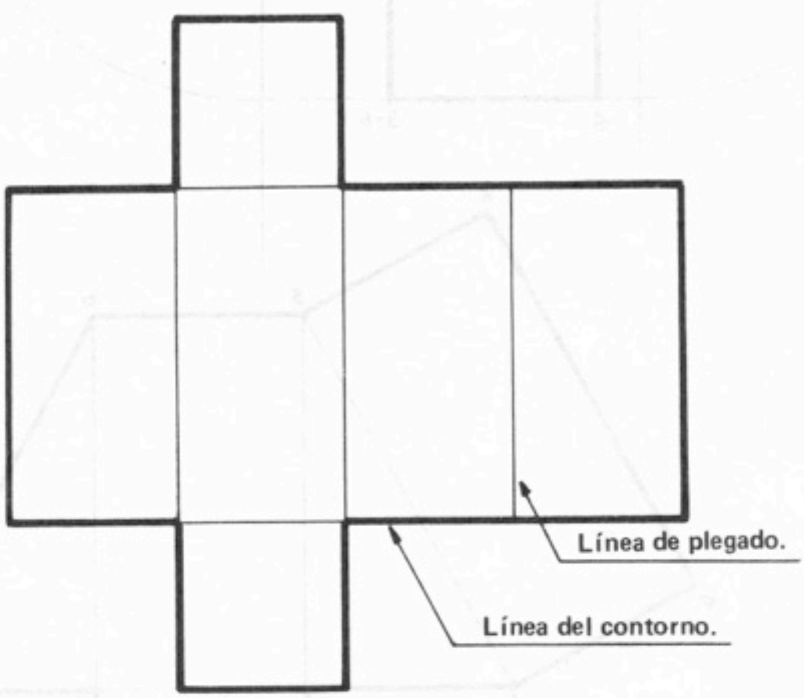
Al desarrollar los prismas sobre un plano geométrico, nos daremos cuenta de que quedan delineadas las superficies o figuras correspondientes a las caras laterales y a las basales de estos cuerpos geométricos.



Desarrollo de un paralelepípedo de base cuadrada.

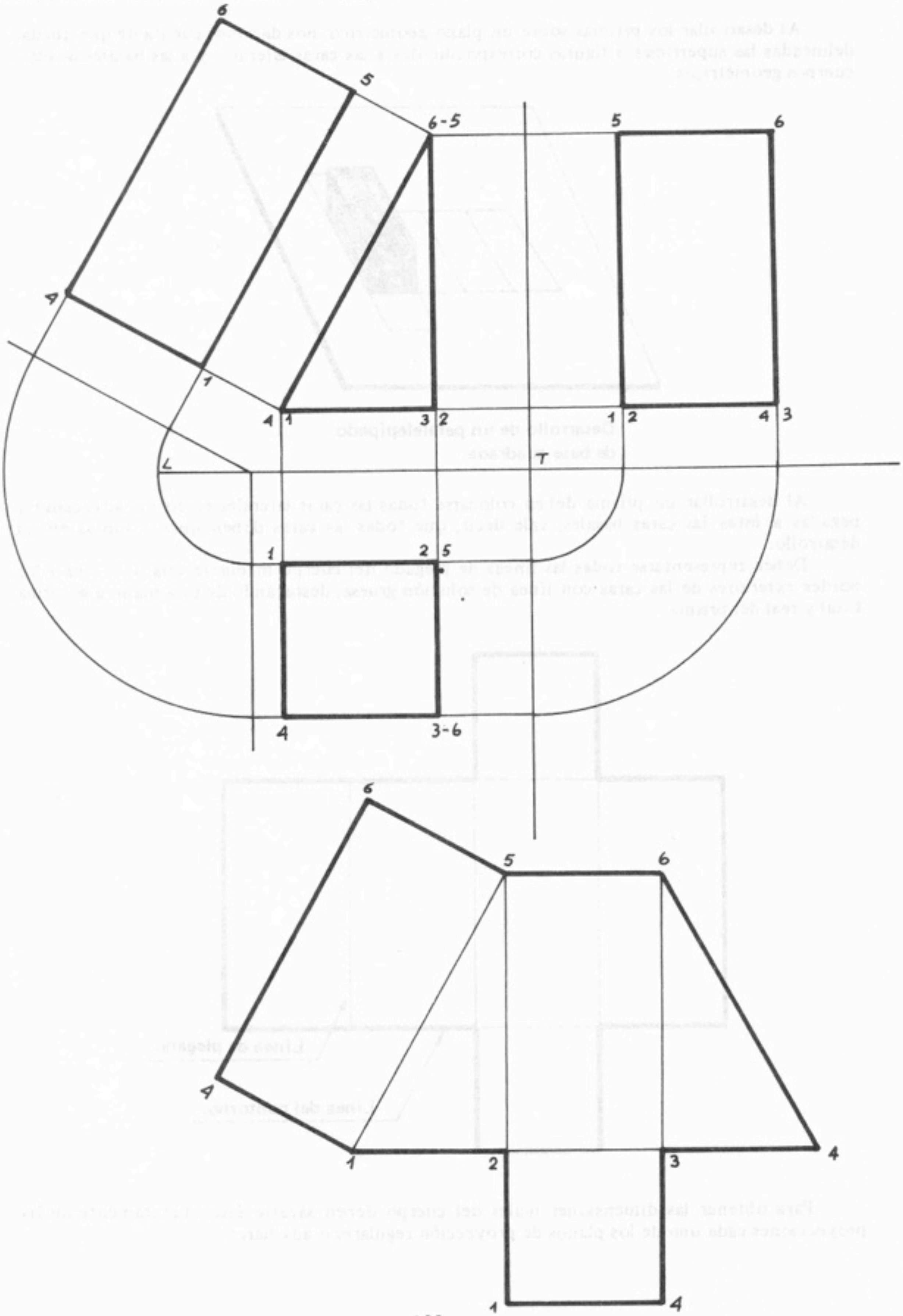
Al desarrollar un prisma deben colocarse todas las caras laterales en forma adyacente y pegadas a éstas las caras basales, vale decir, que todas las caras deben quedar juntas en un desarrollo.

Deben representarse todas las líneas de plegado del cuerpo mediante una línea fina y los bordes exteriores de las caras con línea de solución gruesa, destacando de esta manera la forma total y real del prisma.

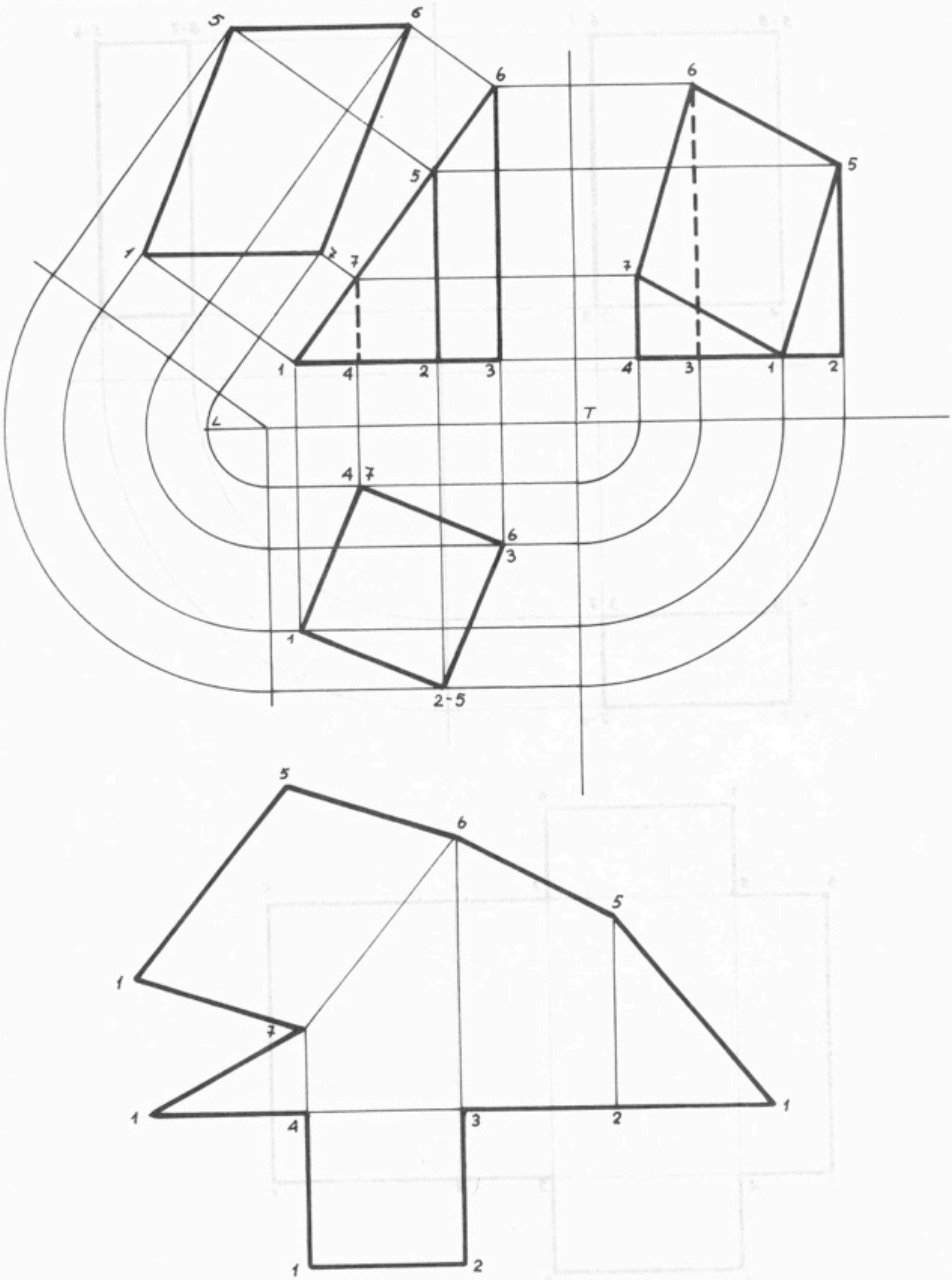


Para obtener las dimensiones reales del cuerpo deben sacarse éstas directamente de las proyecciones cada uno de los planos de proyección regulares o auxiliares.

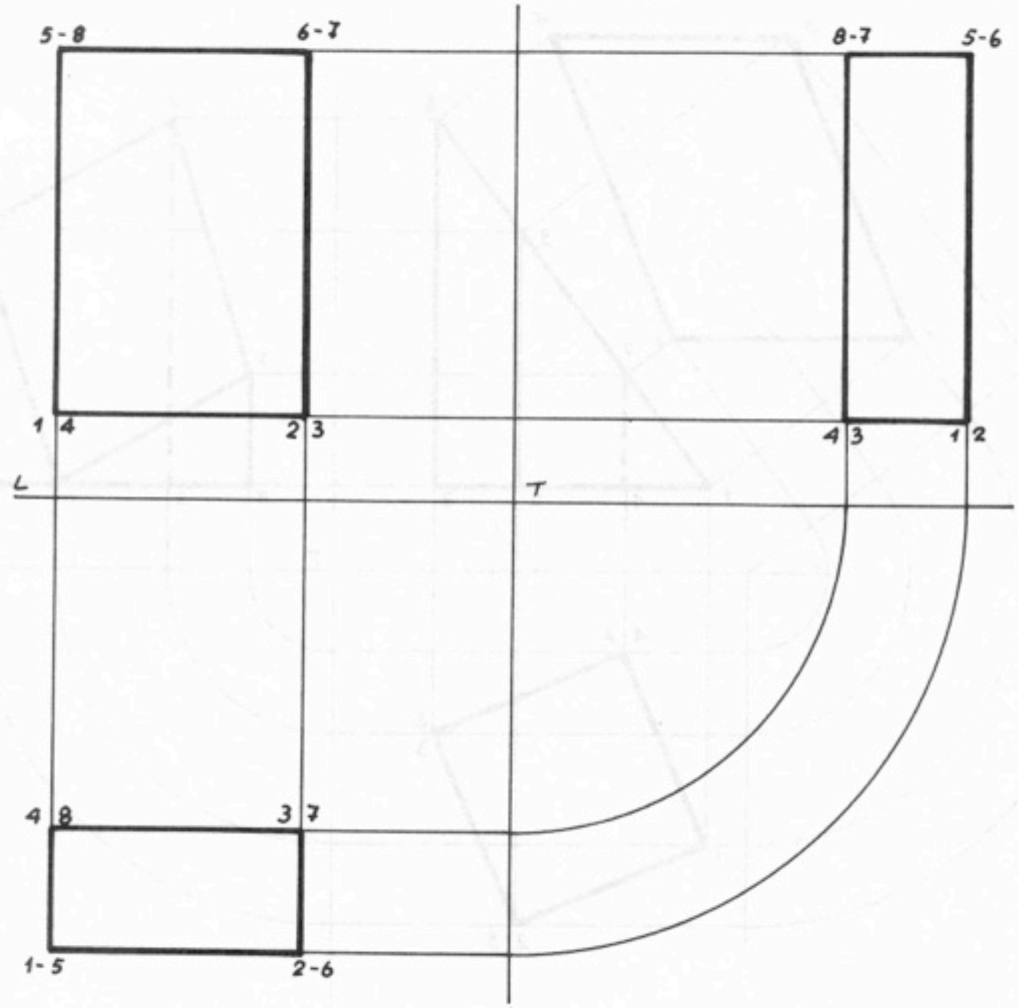
Proyección y desarrollo de un paralelepípedo de base cuadrada.

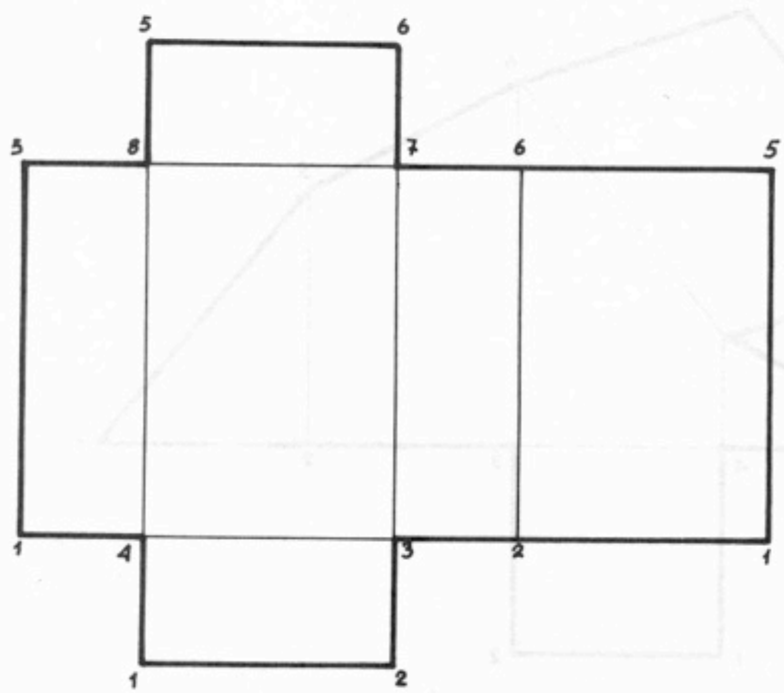


Proyección y desarrollo de un paralelepípedo de base cuadrada.

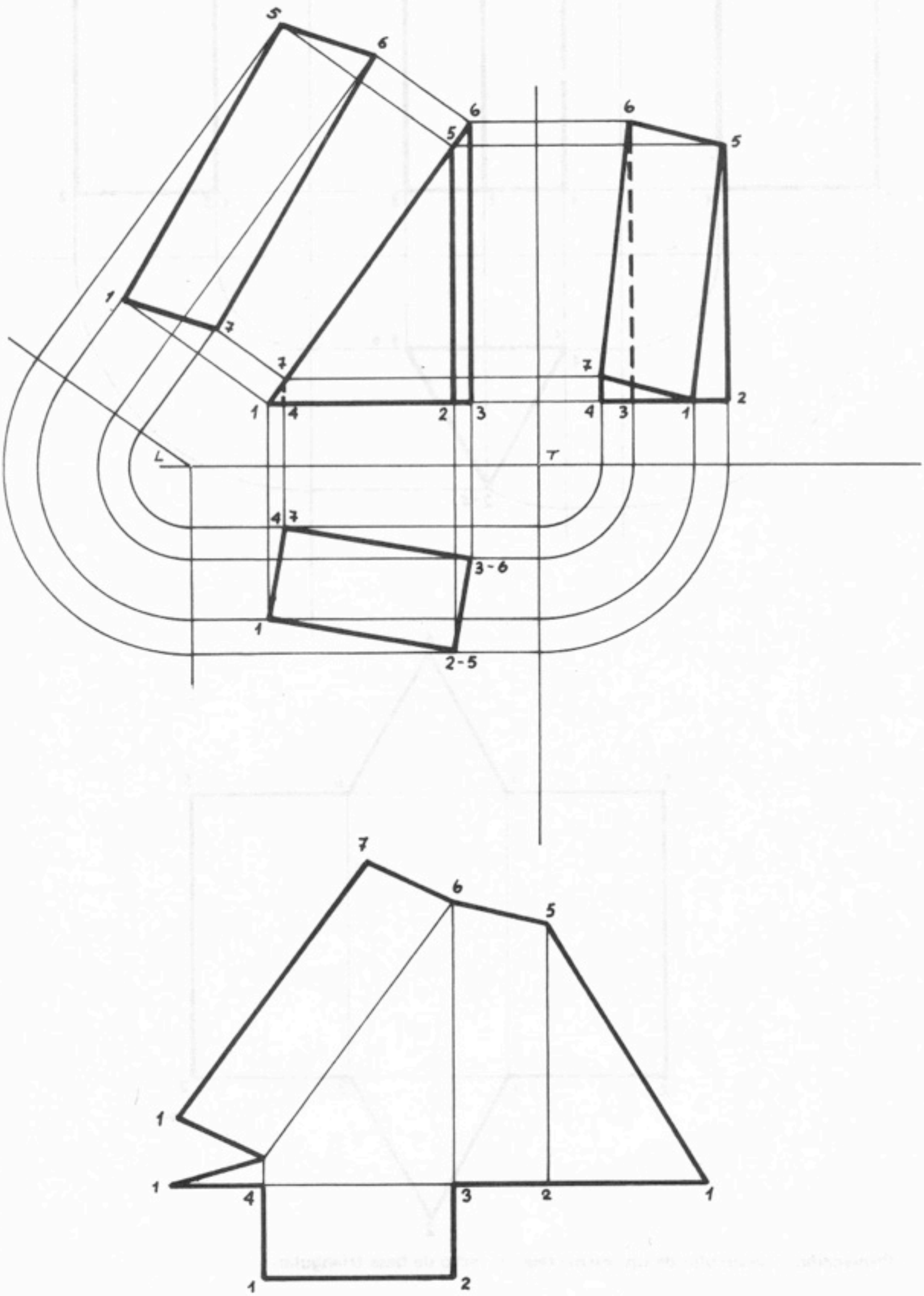


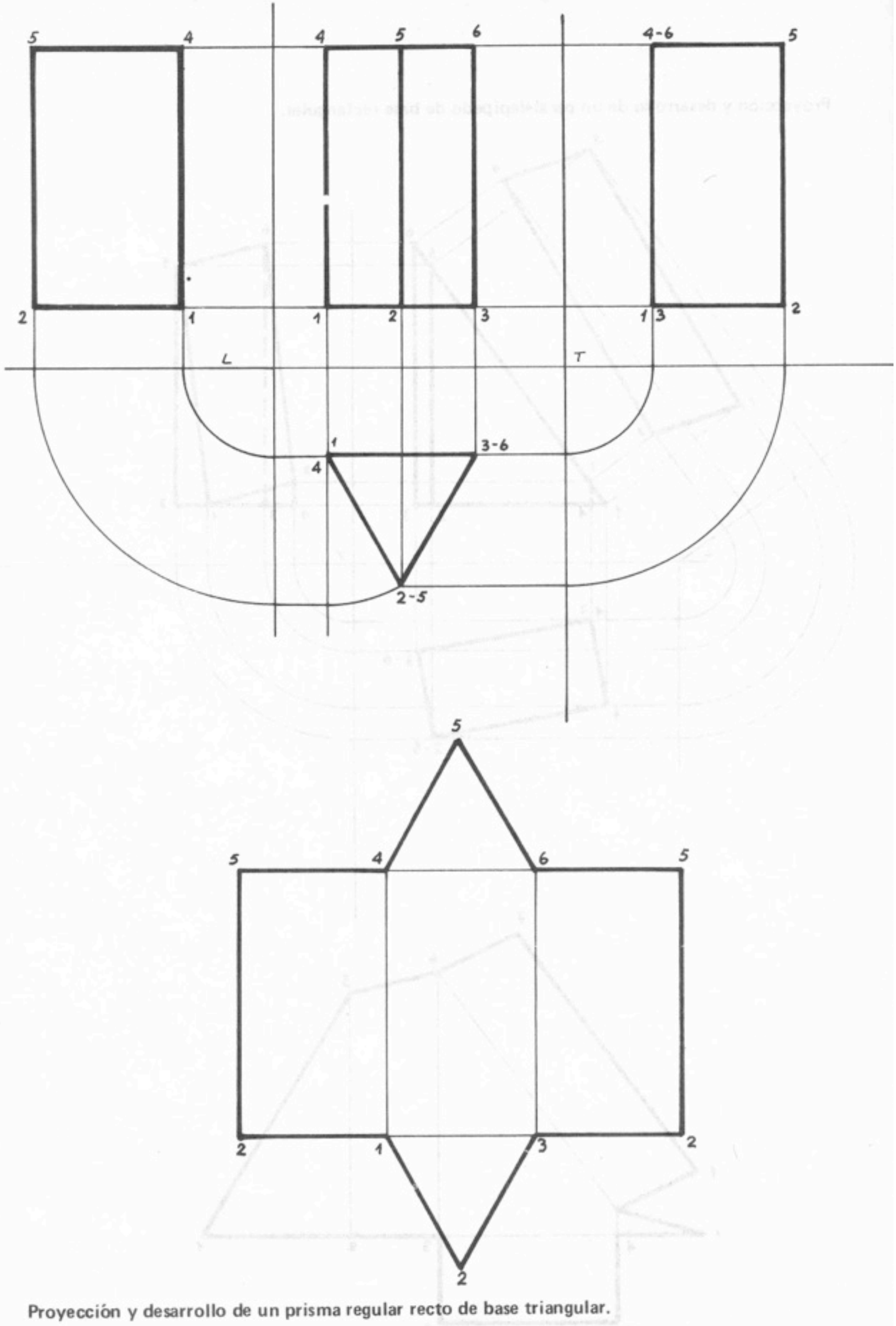
Proyección y desarrollo de un paralelepípedo de base rectangular.





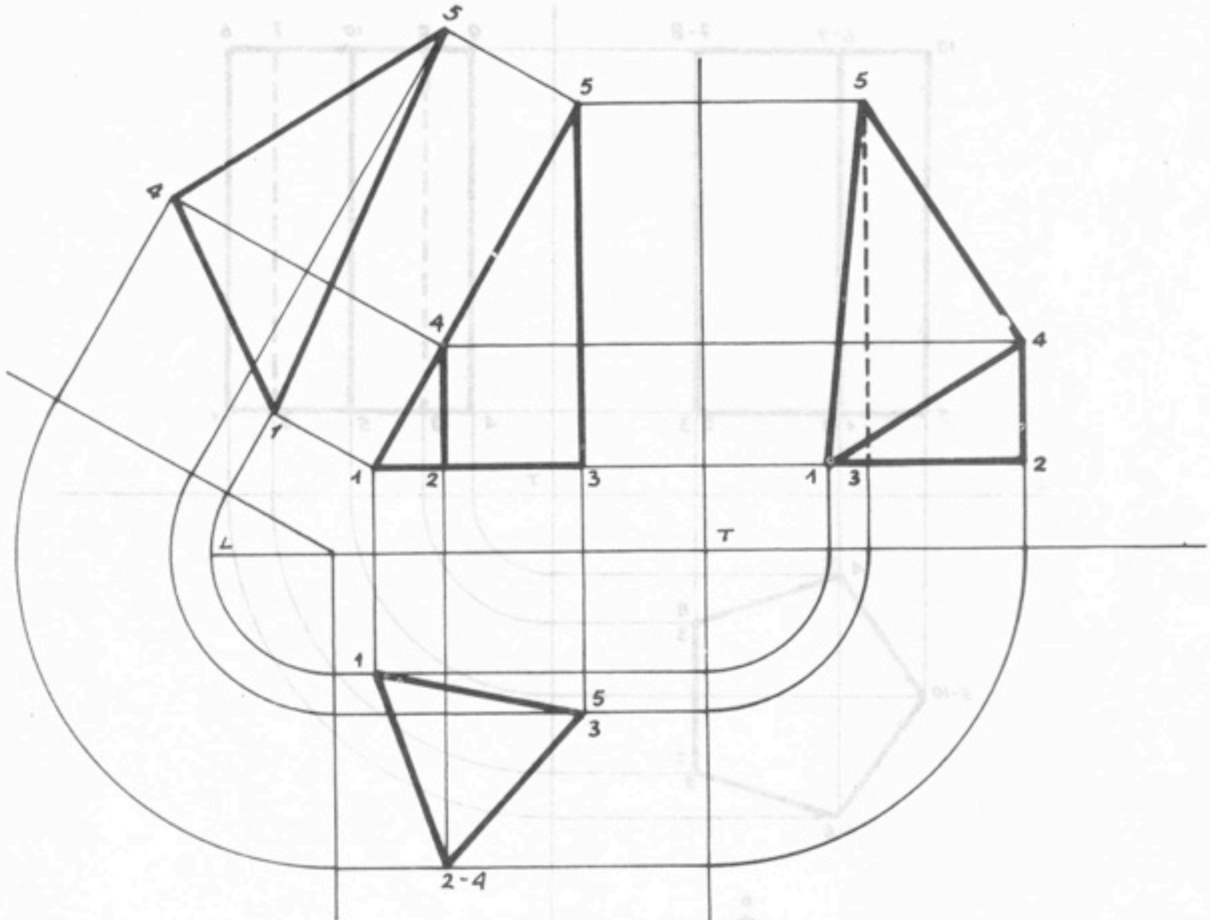
Proyección y desarrollo de un paralelepípedo de base rectangular.

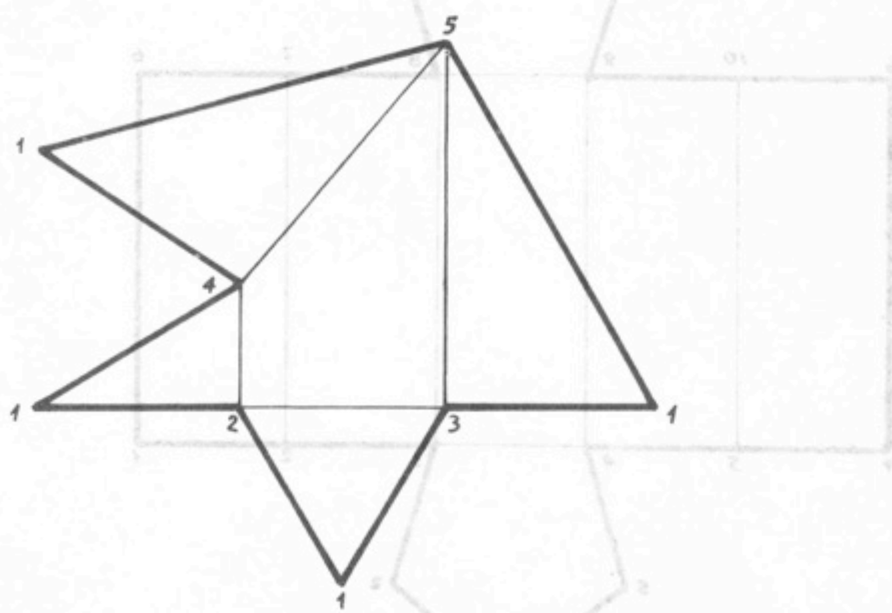




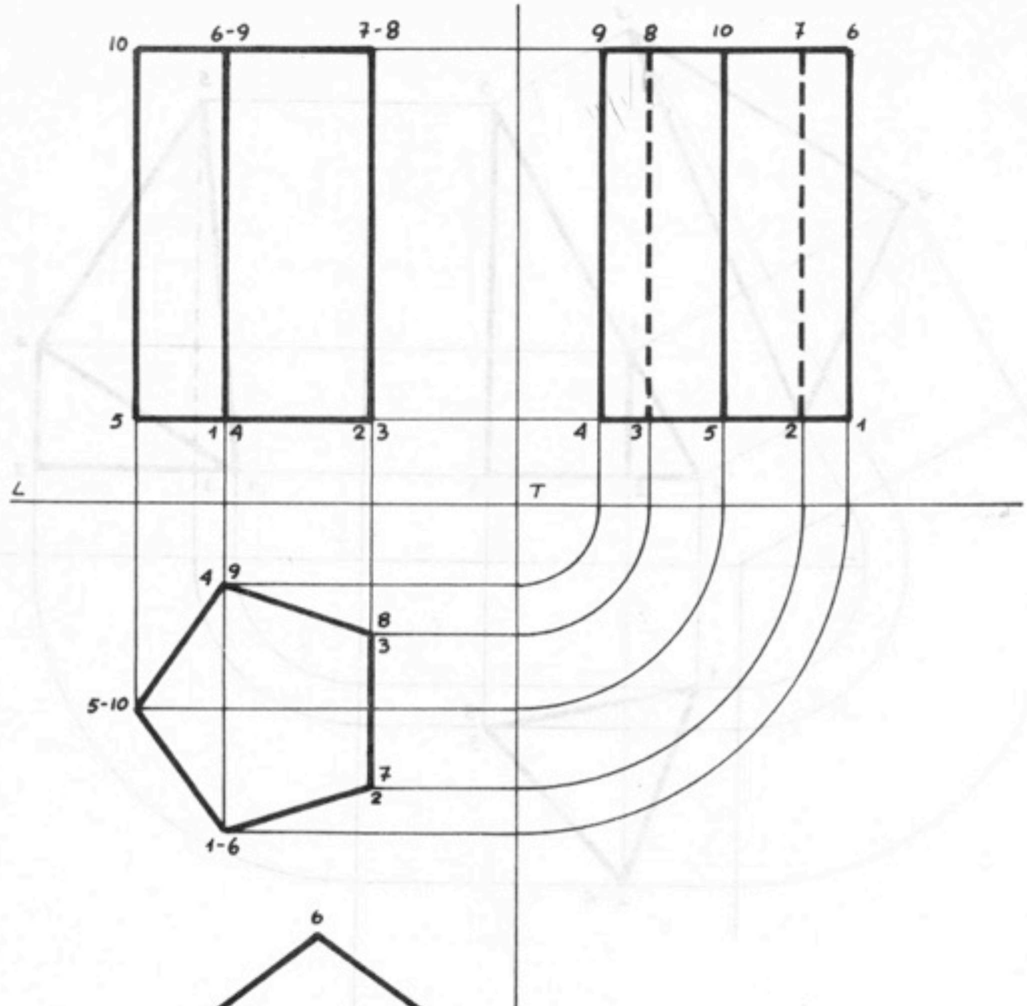
Proyección y desarrollo de un prisma regular recto de base triangular.

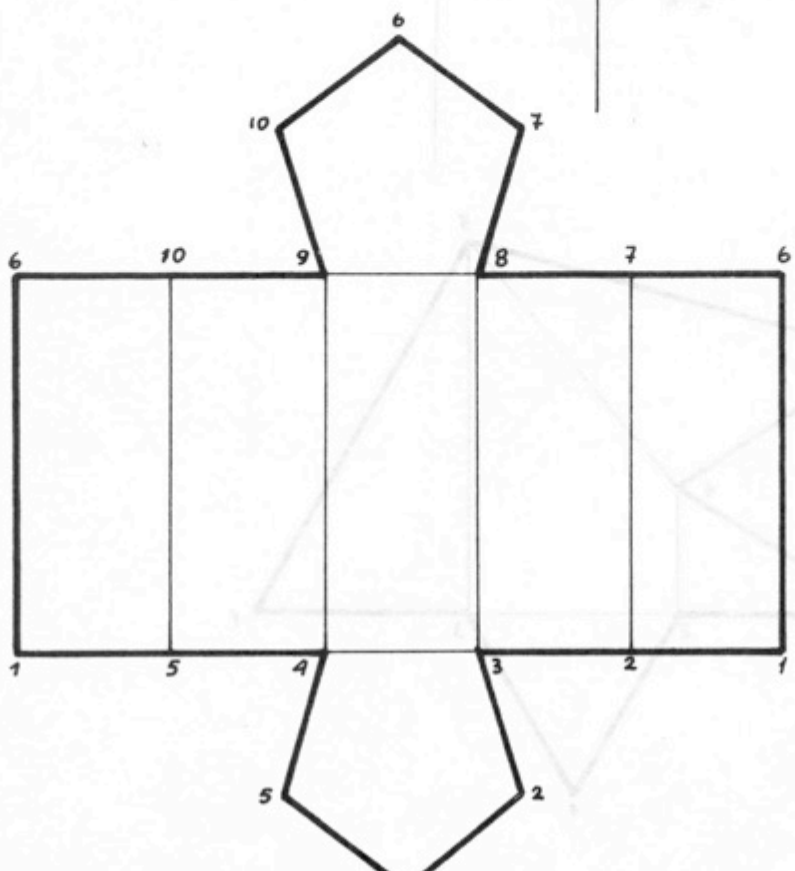
Proyección y desarrollo de un prisma regular recto de base triangular.





Proyección y desarrollo de un prisma regular recto de base pentagonal.





Proyección y desarrollo de un prisma regular recto de base pentagonal.